УДК 519.847

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ОДНОРОДНОГО РЕСУРСА В ИЕРАРХИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ ДРЕВОВИДНОЙ СТРУКТУРЫ

М.Х. Прилуцкий
Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского
Россия, 603600, Нижний Новгород, пр. Гагарина, 23
E-mail: pril@liso.sandy.nnov.su

Ключевые слова: иерархическая система, корневое ориентированное дерево, распределение ресурса, многокритериальность
Key words: hierarchical system, rooted oriented tree, resource allocation, multicriteria

При функционировании экономических, социальных, производственных, технических систем возникает потребность в распределении ресурсов между элементами системы. При этом ресурсы могут быть разной природы – материальные, трудовые, финансовые, временные и т.п. Как правило, объемы имеющихся в наличии ресурсов являются ограниченными, поэтому возникает потребность в разработке методов решения задач их рационального распределения.
DISTRIBUTION OF A HOMOGENEOUS RESOURCE IN HIERARCHICAL SYSTEMS OF A TREE-LIKE STRUCTURE / M.KH. Prilutsky (N.I. Lobatchevsky Nizhny Novgorod State University, 23 Gagarin Ave, Nizhny Novgorod 603600, Russia, E-mail: pril@liso.sandy.nnov.su). During the period of functioning of economic, social, industrial and technical systems, there is a need of resource distribution among system elements. These resources may be of different nature – material, labor, financial, time etc. Usually, volume of available resources is limited, therefore there's reason for developing the methods for solving the rational resource distribution tasks.

1. Содержательное описание задачи

Примером такой задачи может служить задача распределения мощностей каналов передачи данных между различными узлами сети городского провайдера. Пусть известны потребности абонентов сети в получении того или иного количества информации. Известны возможности провайдера в предоставлении каналов той или иной мощности между различными узлами связи. С учетом этих возможностей заданы пожелания (предпочтения) абонентов и оператора относительно возможности передачи того или иного количества информации тому или иному абоненту или узлу. Определены условия признания эффективности того или иного распределения каналов (относительно их пропускной способности). Структура сети и распределяемой в ней информации в общем случае может быть самой разнообразной. Мы же будем рассматривать данную проблему со следующими ограничениями:

- информация распределяется от центра к абонентам через коммутационные узлы по каналам связи;
- каждый узел сети может обслуживаться либо одним из коммутационных узлов, либо напрямую центром;
- каждый абонент сети может обслуживаться лишь одним из коммутационных узлов;
- количество распределяемой информации для коммутационных узлов и абонентов может быть ограничено как сверху (принципиальные ограничения возможностей провайдера), так и снизу (минимальная потребность абонентов в получаемой информации).

Нужно распределить пропускную способность каналов, учитывая как потребности и предпочтения абонентов, так и возможности оператора (провайдера).

2. Математическая модель

Сеть городского провайдера будем моделировать *многоуровневой иерархической системой корневой древовидной структуры, в которой распределяется однородный ограниченный ресурс*, при этом центр системы (центральный узел провайдера) соответствует корню дерева, элементы (абоненты сети и их обслуживающие коммуникационные узлы) - остальным вершинам. Концевые вершины дерева (листья) будем отождествлять с абонентами, а дуги - с каналами связи.

Пусть $G=(V,A)$ корневое ориентированное дерево порядка $N+1$, $A \subseteq V^2$, где V - множество номеров вершин, разбиением которого является совокупность множеств $\{0\}$, V_u, V_k, соответственно, номер корня дерева (центра), множество номеров листьев (абонентов), $|V_u| = q$, и множество номеров остальных вершин (коммуникационных узлов), $|V_k| = g$. Обозначим через $Q(j) = \{i \,|\, (j,i) \in A, i \in V\}$ - множество номеров вершин графа, непосредственно следующих после вершины с j-ым номером, $j \in V / V_u$, причем, для удобства обозначений будем считать, что $Q(j) = \{j\}$, если $j \in V_u$; $R(i) = \{j \,|\, (i,j) \in A, j \in V\}$ - множество номеров вершин, непосредственно предшествующих вершине с номером i, $i \in V$. Очевидно, что для рассматриваемого случая $|R(i)| = 1$, $i \in V_u \bigcup V_k$, и в дальнейшем номер вершины, непосредственно предшествующий вершине с номером i мы будем обозначать через $\pi(i)$, $i \in V_u \bigcup V_k$.

Корневая древовидность иерархической системы предполагает, что

$R(0) = \varnothing$,

$Q(j) \bigcap Q(i) = \varnothing,\ j \neq i,\ j,i \in V/V_u$,

$Q(j) \bigcap Q(i) = \varnothing,\ j \neq i,\ j,i \in V_u$.

Пусть x_i – количество ресурса, которое поставим в соответствие элементу системы с номером j, а A_j и B_j - соответственно, нижняя и верхняя границы допустимых значений распределяемого ресурса, $0 \le A_j \le B_j \le \infty$, $j \in V$. Тогда ограничения на допустимые значения распределяемого ресурса описываются системой линейных двусторонних алгебраических неравенств транспортного типа:

(1) $$A_j \le \sum_{i \in Q(j)} x_i \le B_j,\ j \in V.$$

Среди элементов системы выделяются «контролируемые», т.е. те элементы, которые определяют условия эффективного функционирования рассматриваемой системы. Множество «контролируемых» элементов обозначим через *K*, $K \subseteq V$. Каждый из контролируемых элементов *i* определяет на соответствующем ему заданном интервале $[A_i, B_i]$ бинарное отношение «$\prec$», отражающее его предпочтения относительно объемов ресурса, который он будет распределять (случай, когда контролируемым элементом является центр), передавать (случай, когда контролируемым элементом является коммуникационный узел) или получать (случай, когда контролируемым элементом является абонент). В общем виде эти бинарные отношения могут быть заданы с помощью функций предпочтения $\chi_i(x_i)$ таких, что для двух величин, $x_i^1, x_i^2 \in [A_i, B_i]$ $x_i^1 \prec x_i^2$, если $\chi_i(x_i^1) \le \chi(x_i^2)$, $i \in K$. Задача распределения однородного ресурса в многоуровневых иерархических системах древовидной структуры заключается в определении такого допустимого решения системы (1), при котором функции предпочтений принимают экстремальные значения:

(2) $$\chi_i(x_i) \to opt,\ i \in K.$$

Полученная задача (1)-(2) является многокритериальной задачей с линейными ограничениями (1) и критериями, которые определяются видом функций предпочтения (2). Для решения таких задач необходимо выбирать схемы компромисса, позволяющие определять понятия эффективных решений. При различных схемах компромисса и различных видах функций предпочтений получаются различные задачи распределения ресурсов в многоуровневых иерархических системах. В случае произвольной структуры иерархической системы (без предположений условий древовидности), подобные задачи подробно рассматривались в [1]. Основная проблема общего случая характеризуется отсутствием эффективных процедур определения совместности системы (1). Оказывается, что структура корневой древовидности допускает эффективную конструктивную схему не только проверки на существование допустимых решений системы (1), но и построения таких решений. Поставленную общую задачу распределения ресурсов можно разбить на две подзадачи. Первая заключается в определении существования решения, то есть определения совместности системы линейных алгебраических двусторонних неравенств транспортного типа (1). Вторая состоит в определении среди допустимых решений наиболее эффективных с точки зрения как выбранных функций предпочтений (2), так и выбранных схем компромисса.

3. Совместность систем линейных алгебраических неравенств транспортного типа

Рассмотрим величины A_i^p и B_i^p, которые определяются с помощью следующих рекуррентных соотношений:

(3)
$$A_i^p = A_i,\ i \in V_u,$$
$$B_i^p = B_i,\ i \in V_u,$$
$$A_i^p = \max(A_i, \sum_{j \in Q(i)} A_j^p),\ \ i \in V / V_u,$$
$$B_i^p = \min(B_i, \sum_{j \in Q(i)} B_j^p),\ \ i \in V / V_u.$$

Далее, будем называть их, соответственно, левой и правой «приведенными» границами элемента *i*, $i \in V$.

Теорема 1. Система (1) совместна тогда и только тогда, когда $A_i^p \le B_i^p$, $i \in V$.

Доказательство. Необходимость условий теоремы очевидна. Доказательство достаточности проведем конструктивно. Покажем, что при выполнении условий теоремы, специальным образом построенный *N*+1 мерный вектор $x = (x_0, x_1, ..., x_N)$, является допустимым решением системы (1). Здесь x_0 - количество ресурса, которое будет распределено центром системы; x_i - количество ресурса, которое будет распределено через *i*-ый коммуникационный узел, $i \in V_k$; x_j - количество ресурса, которое получит *j*-ый абонент, $j \in V_u$.

Так как по условиям теоремы $A_0^p \le B_0^p$, то найдется такое значение x_0, что $x_0 \in [A_0^p, B_0^p]$, а тем самым (из-за того, что из рекуррентных соотношений (3) при выполнении условий теоремы следует, что $[A_0^p, B_0^p] \subseteq [A_0, B_0]$) x_0 - удовлетворяет соответствующему условию соотношений (1).

Компоненты вектора x_i, $i \in Q(0)$, определяются из следующих соотношений:

(4)
$$\sum_{i \in Q(0)} x_i = x_0,\ A_i^p \le x_i \le B_i^p,\ i \in Q(0).$$

Из рекуррентных соотношений (3) и условий теоремы следует, что $A_i \le x_i \le B_i$, тем самым x_i, $i \in Q(0)$, удовлетворяют соответствующим условиям соотношений (1).

Продолжая находить аналогичным образом значения компонент вектора $x = (x_0, x_1, ..., x_N)$, мы построим требуемое допустимое решение системы (1).

Теорема 1 доказана.

Замечание 1. Из соотношений типа (4) следует, что при выполнении хотя бы для некоторых элементов условий $A_i^p < B_i^p$, существует бесконечное множество допустимых значений компонент искомого вектора $x = (x_0, x_1, ..., x_N)$. Это свойство будет использовано при определении оптимальных решений поставленной задачи.

4. Аддитивные схемы компромисса

Будем предполагать, что распределение ресурсов в иерархических системах удовлетворяет условиям аддитивности и пропорциональности. Тогда схему компромисса, позволяющего определять понятие оптимального решения в рассматриваемых задачах, будем задавать с помощью линейной функции, определяющей некоторую суммарную характеристику, отражающую условия эффективного функционирования системы.

4.1. Задача 1. Максимизация суммарного дохода

Пусть $K = V_u$, т.е. контролируемыми элементами являются абоненты. Каждому контролируемому элементу i поставим в соответствие величину c_i, определяющую доход, который получит система за единицу ресурса, распределенного элементу i, $i \in V_u$. Тогда функции предпочтения для контролируемых элементов будут иметь вид $\chi_i(x_i) = c_i x_i$, и схема компромисса будет задаваться с помощью функции $\chi_0(\bar{x}) = \sum_{i \in V_u} c_i x_i$. Задача максимизации суммарного дохода в этом случае ставится как следующая задача линейного программирования:

$$\chi_0(\overline{x^0}) = \max\left\{\sum_{i \in V_u} c_i x_i \mid A_i \le \sum_{j \in Q(i)} x_j \le B_i, i \in V\right\}.$$

Специфика поставленной задачи дает возможность построить алгоритм ее решения, основанный на соотношениях, определяющих оптимальные значения переменных. Пусть для удобства обозначений элементы множества V_u перенумерованы в порядке не убывания величин c_i и $s_1, s_2, ..., s_m$ - последовательность вершин, где $s_i = \pi(s_{i-1})$, i=2,3,…,m, $s_1 \in \{1,2,...,q\}$, $s_m = 0$.

Тогда для $s_1 = 1$

$$x^0_{s_1} = \underline{\min}_{i=1,m}\left(B^p_{s_i} - \sum_{r=2}^{i} \sum_{j \in Q(s_r) \setminus \{s_{r-1}\}} A^p_j\right). \tag{5}$$

Перейдем к новой задаче, в которой отсутствует элемент с номером s_1, а соответствующие левые и правые границы уменьшены на величину x^0_1 и приведены. После такого перехода измененные соотношения (5) позволят, задав $s_1 = 2$, найти величину x^0_2. Аналогично находятся все остальные компоненты искомого оптимального решения задачи максимизации суммарного дохода.

4.2. Задача 2. Минимизация суммарных затрат

Пусть $K = V_k$, т.е. контролируемыми элементами являются коммуникационные узлы. Каждому элементу i из множества V_k поставим в соответствие величину c_i, определяющую «затраты», которые получит система (центр) за единицу ресурса, переданного через элемент i, $i \in V_k$. Тогда $\chi_i(x_i) = c_i x_i$ и схема компромисса будет задаваться с помощью функции $\chi_0(\bar{x}) = \sum_{i \in V_k} c_i x_i$. Задача минимизации суммарных затрат в этом случае ставится как следующая задача линейного программирования:

$$\chi_0(\overline{x^0}) = \min\left\{\sum_{i\in V_k} c_i x_i \mid A_i \le \sum_{j\in Q(i)} x_j \le B_i,\ i\in V\right\}$$

Определение оптимального решения этой задачи осуществляется по следующей схеме. Определим величины d_{s_1}, $s_1 \in V_u$, следующим образом: $d_{s_1} = \sum_{j=s_2}^{s_{m-1}} c_j$. Здесь, как и ранее $s_1, s_2, ..., s_m$ - последовательность вершин, где, $s_i = \pi(s_{i-1})$, i=2,3,…,m, $s_1 \in V_u$, $s_m = 0$. Тогда поставленная задача эквивалентна задаче 1 (максимизации суммарной прибыли):

$$\chi_0(\overline{x^0}) = \max\left\{-\sum_{i\in V_u} d_i x_i \mid A_i \le \sum_{j\in Q(i)} x_j \le B_i,\ i\in V\right\}.$$

Решение этой задачи может быть осуществлено алгоритмом, основанном на соотношениях (6), двойственных к соотношениям (5):

$$x_{s_1}^0 = \max_{\underline{i=1,m}}\left(A_{s_i}^p - \sum_{r=2}^{i} \sum_{j\in Q(s_r)\setminus\{s_{r-1}\}} B_j^p\right). \qquad (6)$$

4.3. Задача 3. Максимизация суммарной прибыли

Пусть $K = V_k \bigcup V_u$, т.е. контролируемыми элементами являются как коммуникационные узлы, так и абоненты. Каждому элементу i из множества V_u поставим в соответствие величину c_i, определяющую доход, который получит система за единицу ресурса, распределенного элементу (абоненту) i. Каждому элементу i из множества V_k поставим в соответствие величину V_u, определяющую «затраты», которую получит система за единицу ресурса, переданного через элемент (коммуникационный узел) i. Тогда $\chi_i(x_i) = c_i x_i$, если $i \in V_u$, $\chi_i(x_i) = d_i x_i$, если $i \in V_k$. Схема компромисса в этом случае задается с помощью функции $\chi_0(\overline{x}) = \sum_{i\in V_u} c_i x_i - \sum_{i\in V_k} d_i x_i$, и задача минимизации суммарных затрат ставится как следующая задача линейного программирования:

$$\chi_0(\overline{x^0}) = \max\left\{\sum_{i\in V_u} c_i x_i - \sum_{i\in V_k} d_i x_i \mid A_i \le \sum_{j\in Q(i)} x_j \le B_i,\ i\in V\right\}.$$

Определение оптимального решения этой задачи осуществляется по следующей схеме. Поставленная задача эквивалентна задаче 1 (максимизации суммарной прибыли):

$$\chi_0(\overline{x^0}) = \max\left\{\sum_{s_1\in V_u} h_{s_1} x_{s_1} \mid A_i \le \sum_{j\in Q(i)} x_j \le B_i,\ i\in V\right\}.$$

Здесь $h_{s_1} = c_{s_1} - \sum_{j=s_2}^{s_{m-1}} d_j$, $s_1 \in V_u$, $s_1, s_2, ..., s_m$ - последовательность вершин, где $s_i = \pi(s_{i-1})$, i=2,3,…,m, $s_m = 0$. Решение этой задачи может быть осуществлено алгоритмом, основанном на соотношениях типа (5) и (6).

5. Построение оптимальной совокупности гарантированных интервалов для контролируемых элементов

Пусть, как и ранее, $s_1, s_2, ..., s_m$ - последовательность вершин, где $s_i = \pi(s_{i-1})$, i=2,3,…,m, $s_1 \in K$, $s_m = 0$.

Обозначим через

(7) $$[A_i^{\Gamma}, B_i^{\Gamma}],\ i \in K,$$

совокупность интервалов для контролируемых элементов, $K \subseteq V_u$, и $\overline{x^{\Gamma}}$ - произвольный набор, $x_i^{\Gamma} \in [A_i^{\Gamma}, B_i^{\Gamma}]$, $i \in K.$ Такой набор в дальнейшем будем называть *системой различных представителей* для совокупности интервалов (7). Совокупность интервалов (7) будем называть системой *гарантированных* интервалов для контролируемых элементов, если для любой системы различных представителей $\bar{x}^{\Gamma}$ найдется такое решение системы (1), $\overline{x^0} = (x_1^0, x_2^0, ..., x_{N+1}^0)$, при котором $x_i^0 = x_i^{\Gamma}$, $i \in K$.

Содержательно введение системы гарантированных интервалов позволяет решать следующую задачу. Все пользователи системы (элементы множества V_u) разбиваются на два класса: контролируемые (с гарантированным обеспечением ресурсами) и неконтролируемые (без гарантированного обеспечения ресурсами). Принадлежность к тому или иному классу определяется дополнительными затратами элементов. Контролируемый элемент имеет возможность получать любое количество ресурса в пределах предоставленного ему гарантированного интервала. Если элемент не является контролируемым, то предоставленное ему количество ресурса не будет выходить из границ приведенного интервала (см. соотношения (3)), но может меняться в зависимости от того, какое количество ресурса будет предоставлено контролируемым элементам. Построение системы гарантированных интервалов позволяет определять условия, при которых любой контролируемый элемент может получить требуемый ему ресурс в любом объеме из соответствующего ему гарантированного интервала и при этом оставшегося ресурса будет достаточно для обеспечения остальных (не контролируемых) элементов с учетом найденных для них приведенных границ.

На множестве контролируемых элементов введем бинарное отношение «$\prec$», которое определяет на множестве K линейный порядок, причем, для удобства обозначений будем предполагать, что K={1,2,…,k} и $i \prec j$, если $i<j$.

Совокупность гарантированных интервалов назовем *оптимальной* (в смысле отношения «$\prec$»), если выполняются следующие условия:

- гарантированный интервал $[A_1^{\Gamma}, B_1^{\Gamma}]$ (для самого «предпочтительного» элемента) построен таким образом, что величина A_1^{Γ} определяет минимально возможный «гарантированный» объем ресурса, который может получить этот элемент, а величина B_1^{Γ} определяет максимально возможный «гарантированный» объем ресурса, который может получить этот элемент;

- если определены гарантированные интервалы для контролируемых элементов с номерами i=1,2,..,j-1, то интервал $[A_j^{\Gamma}, B_j^{\Gamma}]$ для контролируемого элемента с номером j построен таким образом, что величина A_j^{Γ} определяет минимально возможный «гарантированный» объем ресурса, который может получить этот элемент, в предположении, что для всех контролируемых элементов, более предпочтительных (в смысле отношения «$\prec$»), чем элемент с номером j, гарантированные интервалы уже определены; величина B_j^{Γ} определяет максимально возможный «гарантированный» объем ресурса, который может получить этот элемент при выполнении тех же условий;
- так для всех $i \in K$.

Задача определения оптимальной совокупности гарантированных интервалов ставится как взаимозависимая совокупность 2k задач линейного программирования, которые формализуются по следующей схеме.

Искомые величины границ гарантированных интервалов первоначально определяются как нулевые. Пусть величины $A_i^{\Gamma}, B_i^{\Gamma}$, $i = 1,2,...,s$ - решения соответствующих задач линейного программирования, тогда очередная пара задач с номерами 2s+1 и 2s+2 будет иметь вид:

$$A_{s+1}^{\Gamma} = \min\left\{ x_{s+1} \middle| A_i^p - \sum_{j\in Q(i)} A_j^{\Gamma} \le \sum_{j\in Q(i)} x_j \le B_i^p - \sum_{j\in Q(i)} B_j^{\Gamma},\ i \in V \right\},$$

$$B_{s+1}^{\Gamma} = \max\left\{ x_{s+1} \middle| A_i^p - \sum_{j\in Q(i)} A_j^{\Gamma} \le \sum_{j\in Q(i)} x_j \le B_i^p - \sum_{j\in Q(i)} B_j^{\Gamma},\ i \in V \right\}.$$

$s = 1,2,...,k-1.$

Специфика полученных задач линейного программирования (линейные ограничения транспортного типа) позволяет построить эффективную процедуру их решения, основанную на соотношениях (6) в задаче 2 (минимизации суммарных затрат) для определения величин A_i^{Γ}, $i \in K$, и на соотношениях (5) в задаче 1 (максимизации суммарного дохода) для определения величин B_i^{Γ}, $i \in K$.

6. Лексикографическое упорядочение для контролируемых элементов

Здесь предполагается, что контролируемыми могут быть любые элементы множества K, $K \subseteq V$, $|K| = q_0$. В качестве функций предпочтения для контролируемых элементов выберем кусочно-постоянные функции $\chi_i\left(\sum_{j\in Q(i)} x_j, s_i^0, s_i^1, ..., s_i^p \right)$, определенные на множестве $[A_i, B_i]$, со значениями из множества $\{0,1,\ldots,p\}$, где s_i^{ν}, $\nu = 0,1,...,p$ - совокупность вложенных друг в друга интервалов, $s_i^{\nu} \subseteq s_i^{\nu+1}$, $s_i^p = [A_i, B_i]$, причем $\chi_i\left(\sum_{j\in Q(i)} x_j, s_i^0, s_i^1, ..., s_i^p \right) = t$, если

$\sum_{j\in Q(i)} x_j \in s_i^t$ и $\sum_{j\in Q(i)} x_j \notin s_i^{t-1}$. Таким образом введенные функции предпочтения определяют качество распределения ресурсов - чем меньше интервал, которому принадлежит количество полученного элементом ресурса, тем «лучше» выполнены пожелания элемента. Задача распределения ресурсов в этом случае заключается в определении такого допустимого решения системы (1), при котором функции предпочтений принимают экстремальные значения:

$$\chi_i\left(\sum_{j\in Q(i)} x_j, s_i^0, s_i^1, ..., s_i^p\right) \to \min,\ i \in K.$$

Как и в [1] рассмотрим (p+1)-ичную q_0-мерную решетку. Каждый узел решетки определяется q_0-мерным вектором $\bar{r}$, компоненты которого принимают значения из множества $\{0,1,\ldots, p\}$. Узлу решетки $\bar{r}$ поставим в соответствие систему из N+1 линейных алгебраических двусторонних неравенств типа (1) следующим образом:

- если элемент i не является контролируемым, то ему соответствует ограничение из системы (1),
- если элемент i является контролируемым и $r_i = t$, то ему соответствует ограничение $\sum_{j\in Q(i)} x_j \in s_i^t$.

Так если узел решетки имеет координаты $r_i = p$, то ему соответствует система (1). Зададим на введенной решетке лексикографическое отношение порядка π: $r^1 \pi\, r^2$ тогда и только тогда, если $r_i^1 = r_i^2$, $i = 1,2,...,s$, $r_{s+1}^1 < r_{s+1}^2$. Задача распределения ресурсов в этом случае будет заключаться в определении такого узла решетки r^0, которому соответствует совместная система ограничений типа (1) и для которого выполняется $\overline{r^0 \pi}\, \bar{r}$ для всех узлов решетки, для которых совместны соответствующие им системы типа (1). Для решения этой задачи необходимо иметь два алгоритма: алгоритм решения систем линейных алгебраических транспортных двусторонних неравенств типа (1) и алгоритм поиска узла решетки r^0. Первый алгоритм использует в своей основе конструктивную схему доказательства теоремы 1. Второй алгоритм основан на организации двоичного поиска по координатам узлов решетки. Поиск узла решетки r^0 состоит из q_0 шагов. На каждом шаге определяется очередная оптимальная компонента вектора r^0. На первом шаге среди всех узлов решетки вида $(\nu_1, p, p,..., p)$, $\nu \in \{0,1,..., p\}$, находится наименьший по порядку π узел $(\nu_1^0, p, p,..., p)$, для которого совместна система ограничений типа (1). На k-том шаге среди узлов $(\nu_1^0, \nu_2^0,..., \nu_{k-1}^o, \nu_k^0, p,..., p)$ находится наименьший по порядку π узел $(\nu_1^0, \nu_2^0,..., \nu_{k-1}^o, \nu_k^0, p,..., p)$, для которого совместна система ограничений типа (1). На q_0 шаге находится искомый узел r^0. Используя на каждом шаге двоичный поиск по соответствующей этому шагу координате, алгоритм решения поставленной задачи будет включать в себя порядка $q_0 \log_2(p+1)$ проверок выполнения условий теоремы 1 и построения для найденного оптимального узла решетки оптимального решения задачи на основе конструктивной схемы доказательства теоремы 1.

7. Пример

Рассмотрим трехуровневую систему, которая задается ориентированным деревом $G=(V,A)$, $A \subseteq V^2$, где $V=\{0\}\bigcup V_k \bigcup V_u$, $V_k=\{1,2\}$, $V_u=\{3,4,5,6,7,8\}$, $A=\{(0,1),(0,2),(1,3),(1,4),(1,5),(2,6),(2,7),(2,8)\}$, $Q(0)=\{1,2\}$, $Q(1)=\{3,4,5\}$, $Q(3)=\{6,7,8\}$.

<table>
<tr><td colspan="6">$A_0=50$
Элемент 0
$B_0=80$</td></tr>
<tr><td colspan="3">$A_1=10$
Элемент 1
$B_1=22$</td><td colspan="3">$A_2=40$
Элемент 2
$B_2=60$</td></tr>
<tr><td>$A_3=9$
Элемент 3
$B_3=12$</td><td>$A_4=5$
Элемент 4
$B_4=11$</td><td>$A_5=3$
Элемент 5
$B_5=9$</td><td>$A_6=6$
Элемент 6
$B_6=6$</td><td>$A_7=10$
Элемент 7
$B_7=24$</td><td>$A_8=5$
Элемент 8
$B_8=19$</td></tr>
</table>

Моделирующая ее двухиндексная система линейных двусторонних неравенств транспортного типа имеет вид:

Система 1.

(8) $50 \le x_{11}+x_{12}+x_{13}+x_{21}+x_{22}+x_{23} \le 80$

(9) $10 \le x_{11}+x_{12}+x_{13} \le 22$

(10) $40 \le x_{21}+x_{22}+x_{23} \le 60$

(11) $9 \le x_{11} \le 12$

(12) $5 \le x_{12} \le 11$

(13) $3 \le x_{13} \le 9$

(14) $6 \le x_{21} \le 6$

(15) $10 \le x_{22} \le 24$

(16) $5 \le x_{23} \le 19$

На основании соотношений (3) приведенные границы элементов имеют вид: $A_1^p=17$, $B_1^p=22$, $A_2^p=40$, $B_2^p=49$, $A_0^p=57$, $B_0^p=71$.

Из теоремы 1 следует совместность системы 1.

Задача максимизации суммарного дохода. Пусть $K=\{3,4,5,6,7,8\}$ и $c_3=8$, $c_4=6$, $c_5=12$, $c_6=7$, $c_7=4$, $c_8=3$.

Оптимальное решение задачи 1, полученное с помощью соотношений (5), имеет вид:

$x_0^0=66$, $x_1^0=17$, $x_2^0=49$, $x_3^0=9$, $x_4^0=5$, $x_5^0=3$, $x_6^0=6$, $x_7^0=24$, $x_8^0=19$.

Суммарный доход $\chi_0(\overline{x^0})=333$.

Задача минимизации суммарных затрат. Пусть $K=\{1,2\}$ и $c_1=5$, $c_2=7$.

Оптимальное решение задачи 2, полученное с помощью соотношений (6), имеет вид:

$x_0^0=57$, $x_1^0=17$, $x_2^0=40$, $x_3^0=9$, $x_4^0=5$, $x_5^0=3$, $x_6^0=6$, $x_7^0=15$, $x_8^0=19$.

Суммарный доход $\chi_0(\overline{x^0})=365$.

Задача максимизации суммарной прибыли. Пусть $K=\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$, $c_3=12$, $c_4=8$, $c_5=16$, $c_6=7$, $c_7=4$, $c_8=3$, $d_1=5$, $d_2=6$. Определим величины $h_3=7$, $h_4=3$, $h_5=11$, $h_6=0$, $h_7=-3$, $h_8=-4$.

Оптимальное решение задачи 3, полученное с помощью соотношений типа (5) и (6), имеет вид:

$x_0^0=66$, $x_1^0=22$, $x_2^0=42$, $x_3^0=9$, $x_4^0=5$, $x_5^0=8$, $x_6^0=6$, $x_7^0=24$, $x_8^0=12$.

Суммарный доход $\chi_0(\overline{x^0})=46$.

Построение оптимальной совокупности гарантированных интервалов для контролируемых элементов. Пусть контролируемыми являются элементы 3, 5 и 7, причем $3\prec 7\prec 5$. Оптимальная совокупность гарантированных интервалов: $A_3^\Gamma=9$, $B_3^\Gamma=12$; $A_7^\Gamma=15$, $B_7^\Gamma=24$; $A_5^\Gamma=3$, $B_5^\Gamma=5$. Любой набор значений переменных, при котором контролируемые элементы получают требуемые им ресурсы в любом объеме из соответствующих им оптимальных гарантированных интервалов и при этом оставшегося ресурса будет достаточно для обеспечения не контролируемых элементов с учетом найденных для них приведенных границ. Так, например, если $x_3=11$, $x_5=5$, а $x_7=24$, то $x_4=5$, $x_6=6$, $x_8=14$, $x_2=44$, $x_1=21$, $x_0=65$.

Задача с лексикографическим упорядочением контролируемых элементов. Пусть в качестве контролируемых элементов выбраны элемент 0 (центр), элемент 2 (коммуникационный узел) и элемент 4 (абонент). Пусть совокупность вложенных интервалов для контролируемых элементов имеет вид:

s_0^0=[70,80], s_0^1=[65,80], s_0^2=[50,80];

s_2^0=[60,60], s_2^1=[50,60], s_2^2=[40,60];

s_4^0=[10,11], s_4^1=[7,11], s_4^2=[5,11].

Здесь p=2 и распределение ресурсов моделируется троичной трехмерной решеткой, каждый узел которой определяется трехмерным вектором, компоненты которого принимают значения из множества {0,1,2}. Будем предполагать, что самым лексикографически предпочтительным является элемент 0, а элемент 2 лексикографически предпочтительнее элемента 4.

На первом шаге работы алгоритма среди всех узлов решетки вида (ν_1,2,2) найдем наименьший по введенному порядку узел решетки. Рассмотрим узел решетки (1,2,2). Соответствующая этому узлу система ограничений (2) отличается от системы (1) лишь ограничением с номером (8). Для системы (2) это ограничение будет иметь левую границу $A_0=65$, правую границу $B_0=80$. Согласно соотношениям (3) приведенные границы для элемента 0 соответственно равны $A_0^p=57$, $B_0^p=71$. Из того, что $A_0<B_0^p<B_0$, по теореме 1 система ограничений (2) совместна. Рассмотрим узел решетки (0,2,2). Соответствующая ему система ограничений (3) отличается от системы (1) ограничением (8), которое

для системы (3) будет иметь левую границу $A_0 = 70$, правую границу $B_0 = 80$. По теореме 1 система (3) совместна.

На втором шаге работы алгоритма среди всех узлов решетки вида $(0, \nu_2, 2)$ найдем наименьший по введенному порядку узел решетки. Рассмотрим узел решетки (0,1,2). Соответствующая этому узлу система ограничений (4) отличается от системы (3) ограничением с номером (10). Для системы (4) это ограничение будет иметь левую границу $A_2 = 50$, правую границу $B_2 = 60$. По теореме 1 система ограничений в этом случае будет несовместной. Отсюда, вторая компонента искомого узла решетки принимает значение 2.

На третьем шаге работы алгоритма среди всех узлов решетки вида $(0, 2, \nu_3)$ найдем наименьший по введенному порядку. Рассмотрим узел решетки (0,2,1). Соответствующая этому узлу система ограничений (5) отличается от системы (1) ограничениями с номером (8) и с номером (12). Для системы (5) ограничение (8) будет иметь левую границу $A_0 = 70$, правую границу $B_0 = 80$, а ограничение (12) будет иметь левую границу $A_4 = 7$, правую границу $B_4 = 11$. По теореме 1 система ограничений в этом случае будет совместной. Рассмотрим узел решетки (0,2,0). Соответствующая этому узлу решетки система ограничений (6) отличается от системы (5) ограничением с номером (12). Это ограничение будет иметь границы $A_4 = 10$, $B_4 = 11$. По теореме 3 система ограничений (6) будет совместной. Тем самым оптимальным (по введенному лексикографическому порядку) узлом решетки будет узел (0,2,0). Оптимальным решением задачи будет вектор $x^0 = (70, 22, 48, 9, 10, 3, 6, 24, 18)$.

Разработанное на основе полученных результатов диалоговое программное обеспечение [2] используется для автоматизации распределения мощностей каналов передачи данных сети городского провайдера АО «Кировэлектросвязь».

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ 97-01-01095.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Прилуцкий М.Х. Многокритериальное распределение однородного ресурса в иерархических системах // АиТ. 1996. № 2. С. 24-29.
2. Прилуцкий М.Х., Рапопорт И.А. Распределение ограниченного ресурса в иерархических компьютерных системах // Сб. трудов ВятГТУ. Киров: ВятГТУ, 2000. С. 67-72.