ИЗВЕСТИЯ РАН. ТЕОРИЯ И СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ, 2007, № 1, с. 78–82

КОМПЬЮТЕРНЫЕ МЕТОДЫ

УДК 519.847

МНОГОКРИТЕРИАЛЬНЫЕ МНОГОИНДЕКСНЫЕ ЗАДАЧИ ОБЪЕМНО-КАЛЕНДАРНОГО ПЛАНИРОВАНИЯ

© 2007 г. М. Х. Прилуцкий

Нижний Новгород, Нижегородский государственный университет

Поступила в редакцию 04.07.06 г.

Рассматриваются задачи объемно-календарного планирования как многокритериальные многоиндексные задачи транспортного типа. Предлагаются вычислительные схемы решения поставленных задач путем осуществления направленного поиска оптимальной вершины многомерного многозначного куба.

Введение. Широкий класс задач принятия решений связан с проблемой эффективного планирования и управления производственными системами. Типичным представителем таких задач является объемно-календарное планирование для подразделений предприятия с единичным и мелкосерийным характером производства. Сформулируем подобную задачу не в общей постановке, с учетом всех зависимостей и связей (как в [1, 2]), а с некоторой степенью идеализации. Вместо технологических требований, которые обычно задаются сетевыми структурами, учитываются этапы изготовления продукции, а вместо конкретных работ с их длительностями – объемные показатели, связанные с совокупностями работ, входящих в соответствующие этапы изготовления продукции. Содержательно задача объемно-календарного планирования формулируется следующим образом. Требуется распределить общий план предприятия в объемных характеристиках (нормочасы, рубли, условные тонны) по различным показателям: группам оборудования, периодам планирования, этапам изготовления, потребляемым ресурсам, видам продукции. Показатели искомого плана делятся на жесткие, требующие обязательного выполнения, и желательные, к достижению которых нужно стремиться. Жесткие показатели формализуются в виде ограничений, а желательные – в виде критериев оптимальности. Тогда задача объемно-календарного планирования ставится как многокритериальная задача (учет желательных показателей) с ограничениями (учет жестких показателей), которые в рассматриваемой идеализации являются линейными.

Пусть $i = \overline{1, m}$ – номера подразделений предприятия, $j = \overline{1, n}$ – заказов, $k = \overline{1, s}$ – изделий, $t = \overline{1, q}$ – периодов планирования. Обозначим через b_{ijkt} объем работ, оставшийся невыполненным в i-м подразделении по j-му заказу и k-му изделию в период планирования t; d_{it} – объем работ, который может быть достигнут в i-м подразделении в период планирования t; r_{jk} – объем работ, который должен быть осуществлен по j-му заказу и k-му изделию; v_{jkt} – обязательный объем работ в период планирования t по заказу для j изделия k; w_j – необходимый объем работ по j-му заказу, $i = \overline{1, m}$, $j = \overline{1, n}$, $k = \overline{1, s}$, $t = \overline{1, q}$.

Предположим, что d_{it}, r_{jk} и v_{jkt} – жесткие, а w_j – желательные показатели искомого плана. Тогда формально задача объемно-календарного планирования будет заключаться в определении таких величин x_{ijkt} (объем работ, который будет выполнен в i-м подразделении по j-му заказу и k-му изделию в период планирования t) $i = \overline{1, m}$, $j = \overline{1, n}$, $k = \overline{1, s}$, $t = \overline{1, q}$, для которых соблюдаются следующие ограничения:

$$\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{s} x_{ijkt} \le d_{it}, \quad i = \overline{1, m}, \quad t = \overline{1, q}$$

(объем работ, реализуемый по всем заказам и изделиям в i-том подразделении в период планирования t, не должен превышать мощности этого подразделения в рассматриваемом периоде планирования),

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{t=1}^{q} x_{ijkt} \ge r_{jk}, \quad j = \overline{1, n}, \quad k = \overline{1, s}$$

(запланированный объем работ по k-му изделию заказа j должен быть выполнен в подразделениях предприятия в течение всего периода планирования),

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ijkt} \ge v_{jkt}, \quad j = \overline{1, n}, \quad k = \overline{1, s}, \quad t = \overline{1, q}$$

(запланированный объем работ по k-му изделию заказа j в момент планирования t должен быть выполнен в подразделениях предприятия),

$$0 \le x_{ijkt} \le b_{ijkt},$$

$$i = \overline{1, m}, \quad j = \overline{1, n}, \quad k = \overline{1, s}, \quad t = \overline{1, q}$$

(естественные ограничения на переменные, формализующие требование запрета выпуска внеплановой продукции), с учетом минимизируемых критериев

$$f_j\left(\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{s}\sum_{t=1}^{q} x_{ijkt}, w_j\right), \quad j = \overline{1, n},$$

задаваемых функциями, неотрицательными по обе стороны от нуля и в нуле принимающими нулевые значения. Эти функции определяют оценки отклонений искомых показателей от желательных показателей плана. В качестве таких функций могут быть выбраны кусочно-линейные, а свертку можно провести как линейную комбинацию этих функций. В этом случае для формальной постановки задачи необходимо, чтобы пользователь указал углы наклона линейных участков функций и коэффициенты свертки. Однако, как показал опыт внедрения [3, 4], пользователь может лишь указать границы для величин отклонений, в которых эти величины являются “отличными”, “очень хорошими”, “хорошими”, “удовлетворительными” и др. Тогда функции отклонений $f_j(x)$, $j = \overline{1, n}$, должны быть кусочно-постоянными, разбивающими множество величин отклонений по каждому критерию на области "качества" отклонений. Такими свойствами обладают функции, область значений которых задается множеством целых неотрицательных чисел от 0 до $p - 1$ (0 – “отлично”, 1 – “очень хорошо”, и т.д.). При разных схемах выбора жестких и желательных показателей искомого плана, по-разному ставятся задачи объемно-календарного планирования.

К особенностям рассматриваемых задач относится:

параметры математической модели являются многоиндексными, причем число индексов может быть различным в зависимости от рассматриваемой задачи,

ограничения математической модели представляют собой систему линейных алгебраических неравенств транспортного типа, каждое из которых получается суммированием по некоторым индексам,

критерии оптимизационных задач задаются в виде ступенчатых функций, аргументами которых также являются суммы значений варьируемых параметров по некоторым индексам.

1. Общая математическая модель. В наиболее общем виде задача объемно-календарного планирования может быть поставлена следующим образом. Заданы булевы матрицы A и B, соответственно, размерностей $m \times k$ и $n \times k$, действительный неотрицательный вектор $\vec{c}$ размерности m и векторная функция $\vec{F}(\vec{y})$, определенная на множестве n-мерных векторов из R^n со значениями из $\{0, 1, \ldots, p - 1\}$. Введенная функция $\vec{F}(\vec{y})$ отображает пространство R^n на множество вершин n-мерного p-ичного куба. Требуется найти вектор $\vec{x}$, удовлетворяющий ограничениям $A\vec{x} \le \vec{c}$ с учетом минимизируемых критериев $\vec{F}(B\vec{x})$. Полученная задача является n-критериальной задачей с линейными ограничениями и частными критериями оптимальности, структура которых зависит от вида функции $\vec{F}(\vec{y})$. Система ограничений $A\vec{x} \le \vec{c}$ эквивалентна совокупности линейных алгебраических неравенств транспортного типа

$$\sum_{j \in A(i)} x_j \le c_i, \quad i = \overline{1, m},$$

в которой $A(i)$ – множество индексов, соответствующих i-й строке булевой матрицы A, $i = \overline{1, m}$, а вектор $B\vec{x}$ имеет координаты

$$\sum_{j \in B(i)} x_j, \quad i = \overline{1, n},$$

где $B(i)$ – множество индексов, отвечающих i-й строке булевой матрицы B, $i = \overline{1, n}$, Относительно векторной функции $\vec{F}(\vec{y})$ можно сделать следующие допущения:

Для любой вершины n-мерного p-ичного куба $\vec{z}$ множество векторов $\vec{y}$, удовлетворяющих неравенству $\vec{F}(\vec{y}) \le \vec{z}$, является параллелепипедом в пространстве R^k, ребра которого параллельны базисным векторам R^k.

Если $\vec{z} = (p - 1, p - 1, \ldots, p - 1)$, то множество векторов, определяемых ограничениям $\vec{F}(\vec{y}) \le \vec{z}$, совпадает с R^k;

Выразим функцию $\vec{F}(\vec{y})$ следующим образом. Для каждой компоненты i рассмотрим совокупность вложенных друг в друга сегментов $S_i^{t_i}$, $S_i^{t_i} \subseteq$ $\subseteq S_i^{t_i+1}$, $t_i = \overline{0, p-2}$, $p \ge 1$, $i = \overline{1, n}$. Тогда $F_i(\sum_{j \in B(i)} x_j) = t_i$, если $\sum_{j \in B(i)} x_j \in S_i^{t_i}$, но $\sum_{j \in B(i)} x_j \notin S_i^{t_i-1}$. После проделанных преобразований задача объемно-календарного планирования формулируется так: требуется найти вектор $\vec{x}$, удовлетворяющий ограничениям $\sum_{j \in A(i)} x_j \le$ $\le c_i, i = \overline{1, m}$, с учетом минимизируемых критериев $F_i(\sum_{j \in B(i)} x_j) = t_i, t_i \in \{0, 1, \ldots, p-1\}, i = \overline{1, n}$.

2. Алгоритм решения. Сведем поставленную многокритериальную задачу к однокритериальной, путем задания на множестве вершин n-мерного p-ичного куба линейного порядка π, для которого должно выполняться: если для вершин куба $\vec{\mu}$ и $\vec{\nu}$, определяемых векторами пространства R^n, справедливы условия $\vec{\mu} \ge \vec{\nu}$ (покомпонентно), то $\vec{\mu} \pi \vec{\nu}$. Это можно сделать, так как множество значений критериев (значений векторной функции $\vec{F}(\vec{y})$) является конечным множеством. Тогда задача объемно-календарного планирования будет заключаться в поиске такого k-мерного вектора $\vec{x}^0$, связанного ограничением $\sum_{j \in A(i)} x_j^0 = c_i$, $i = \overline{1, m}$, что для любого $\vec{x}$, с компонентами $\sum_{j \in A(i)} x_j \le c_i$, $i = \overline{1, m}$, выполняется отношение $\vec{F}(B\vec{x}^0) \pi \vec{F}(B\vec{x})$.

Каждой вершине куба $\vec{z} = (z_1, z_2, \ldots, z_n)$ поставим в соответствие систему $S(\vec{z})$ линейных алгебраических неравенств, всегда включающую в себя совокупность ограничений $\sum_{j \in A(i)} x_j \le c_i, i = \overline{1, m}$, и в зависимости от вершины куба набор двусторонних ограничений $\sum_{j \in B(i)} x_j \in S_i^{z_i}$, $i = \overline{1, n}$, Зададим на множестве вершин куба двузначную функцию $f(\vec{z})$, принимающую значение 1, если система $S(\vec{z})$ совместна и 0 в противном случае. Функция $f(\vec{z})$ обладает свойством: если для вершин куба $\vec{\mu}$ и $\vec{\nu}$ имеет место $\vec{\mu} \ge \vec{\nu}$ (покомпонентно), то $f(\vec{\mu}) \ge f(\vec{\nu})$, т.е. функция $f(\vec{z})$ является монотонной.

Таким образом, для решения задачи объемно-календарного планирования необходимо решать две задачи: 1) поиск оптимальной вершины многомерного многозначного куба и 2) проверка на совместность систем двусторонних линейных алгебраических неравенств транспортного типа.

3. Поиск оптимальной вершины многомерного многозначного куба. Для решения можно предложить следующую вычислительную схему. На первом шаге выбирается вершина куба $\vec{z}^* = (p-1,$ $p-1, \ldots, p-1)$ и рассчитывается $f(\vec{z}^*)$, что равносильно проверке на совместность системы $S(\vec{z}^*)$: $\sum_{j \in A(i)} x_j \le c_i$, $i = \overline{1, m}$. В противном случае исходная задача не имеет решения. Если система совместна, то выбирается некоторая вершина куба $\vec{z}^1$ и определяется $f(\vec{z}^1)$, что эквивалентно оценке совместности системы $S(\vec{z}^1)$. В зависимости от значения $f(\vec{z}^1)$, осуществляется следующей вершине и т.д. Процесс вычислений должен быть конечен. Из всех просмотренных вершин куба отыскивается оптимальная вершина $\vec{z}^0$, для которой $f(\vec{z}^0) = 1$ и $\vec{z}^0 \pi \vec{z}$ при всех $\vec{z}$, таких, что $f(\vec{z}) = 1$. Решением исходной задачи объемно-календарного планирования будет любой допустимый план совместной системы $S(\vec{z}^0)$. В качестве порядка π, определенного на множестве вершин n-мерного p-ичного куба, выберем лексикографическое отношение, предполагающее $\vec{z}^1 \pi \vec{z}^2$ тогда и только тогда, когда существует i, $1 \le i \le n$, что для координат векторов $\vec{z}^1$, $\vec{z}^2$ выполняется: $z_k^1 = z_k^2$, $k = 1,$ $2, \ldots, i-1$, и $z_i^1 < z_i^2$. Алгоритм поиска оптимальной вершины куба при лексикографическом порядке для монотонной функции состоит из n шагов. На первом шаге среди вершин вида $(z_1, p-1,$ $p-1, \ldots, p-1)$ находится значение z_1^0, $z_1^0 \in \{0, 1,$ $\ldots, p-1\}$, обеспечивающее $f(z_1^0, p-1, \ldots, p-1) =$ $= 1$ и $z_1^0 \le z_1$, для всех тех z_1, для которых $f(z_1, p-1,$ $\ldots, p-1) = 1$. На втором шаге среди узлов вида $(z_1^0,$ $z_2, p-1, p-1, \ldots, p-1)$ аналогично устанавливается вторая координата оптимальной вершины. На n-м шаге приходим к искомой оптимальной вершине куба. Общее число вычислений функции $f(\vec{z})$ имеет порядок $n\log_2 p$.

З а м е ч а н и е 1. В случае, если размерность куба больше, чем количество вложенных сегментов, можно модифицировать описанный выше алгоритм, осуществляя двоичный поиск не по значениям координат, а по координатам куба. Тогда оценка числа вычислений функции $f(\vec{z})$ составляет $p\log_2 n$.

4. Проверка на совместность систем двусторонних линейных алгебраических неравенств транспортного типа. Для проверки на совместность систем линейных алгебраических неравенств $S(\vec{z})$ в общем случае можно применять классические вычислительные методы линейной алгебры [5], однако то, что ввведенные ограничения – транспортного типа, позволяет использовать специальные алгоритмы.

В общем случае $S(\vec{z})$ может быть представлена в виде системы линейных алгебраических неравенств транспортного типа с двусторонними ограничениями

$$a_i \le \sum_{j \in Q(i)} x_j \le b_i, \quad i = \overline{1, q},$$

над k-мерным евклидовым пространством R^k. Здесь $q = m + n$; $a_i = 0$ и $b_i = c_i$, если $i = \overline{1, m}$; a_i и b_i – границы сегмента с номером i, когда $i = \overline{n+1, q}$; $Q(i)$ – множество индексов, по которым осуществляется суммирование i-го ограничения, $i = \overline{1, q}$. Если $\vec{x}^0$ – произвольный k-мерный вектор, удовлетворяющий всем q ограничениям системы, то задача решена. Пусть s – первое по порядку ограничение, условия которого нарушены. Построим вектор $\vec{x}^1$ по следующему правилу:

$$x_j^1 = \begin{cases} x_j^0 + \left(a_s - \sum\limits_{j \in Q(s)} x_j^0\right) \times |Q(s)|^{-1}, \text{ если } a_s > \sum\limits_{j \in Q(s)} x_j^0, \\ x_j^0 - \left(\sum\limits_{j \in Q(s)} x_j^0 - b_s\right) \times |Q(s)|^{-1}, \text{ если } \sum\limits_{j \in Q(s)} x_j^0 > b_s, \end{cases}$$

и перейдем к $(s + 1)$-му ограничению. Это справедливо для всех ограничений. Если система совместна, то последовательность векторов $\vec{x}^{\nu}$, найденных по вышеописанной схеме, при $\nu \longrightarrow \infty$ сходится к допустимому решению системы. Предложенный алгоритм является обобщением релаксационного метода ортогональных проекций Агмона–Моцкина [6, 7] на случай двусторонних систем линейных алгебраических неравенств транспортного типа.

З а м е ч а н и е 2. Как и любая итерационная процедура, предложенный алгоритм зависит от двух папаметров: точности ε (допустимое нарушение неравенств системы ограниченной задачи 2) и количества шагов алгоритма h. Реализована следующая схема, позволяющая на практике осуществлять решение конкретных задач. В зависимости от быстродействия компьютеравыбирается величина h. Затем устанавливается заведомо большое ε_0 и решается задача 2. Если за h шагов решение не найдено, то делается предположительный вывод о несовместности системы ограничениц, определяемой задачей 2. Если решение найдено, то берется новое ε, например $\varepsilon_0/2$. Так, провведя двоичный поиск, рассчитывается минимальное ε, $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$ при котором можно осуществлять решение задачи.

5. Сведение задачи 2 к задаче поиска допустимой циркуляции в транспортной сети. Так как в рассматриваемых задачах объемно-календарного планирования варьируемые параметры являются многоиндексными, а ограничения представляют собой систему линейных алгебраических неравенств транспортного типа, каждое из которых получается суммированием по некоторым индексам, то для удобства изложения материала можно воспользоваться формализацией, предложенной в [8] при постановке многоиндексных транспортных задач линейного программирования. Пусть $N(s) = \{1, 2, \ldots, s\}$; j_l – некоторый параметр (индекс), $j_l \in J_l = \{1, 2, \ldots, n_l\}$, $l \in N(s)$; $f = \{k_1, k_2, \ldots, k_t\}$, $f \subseteq N(s)$. Обозначим через $F_f = (j_{k_1}, j_{k_2}, \ldots, j_{k_t})$ – набор значений индексов, $F_f \in E_f$, $E_f = J_{k_1} \times J_{k_2} \times \times J_{k_t}$. Каждому F_f поставим в соответствие действительное число z_{F_f}, $F_f \in E_f$. Совокупность таких чисел для всех возможных значений индексов $j_{k_1}, j_{k_2}, \ldots, j_{k_t}$ представим как $\{z_{j_{k_1}, j_{k_2}, \ldots, j_{k_t}}\} = \{z_{F_f}\}$. Введем $\bar{f} = N(s) \setminus f$, тогда $F_{N(s)} = F_f F_{\bar{f}}$ – набор $(k_1, k_2, \ldots, k_t, k_{t+1}, \ldots, k_s)$. Предположим, что

$$\sum_{F_f \in E_f} z_{F_f F_{\bar{f}}} = \sum_{j_{k_1} \in J_{k_1}} \sum_{j_{k_2} \in J_{k_2}} \ldots \sum_{j_{k_t} \in J_{k_t}} z_{F_f F_{\bar{f}}}, \quad F_{\bar{f}} \in E_{\bar{f}}.$$

В результате множество допустимых решений задачи объемно-календарного планирования может быть описано следующим образом:

$$D(M) = $$

$$= \left\{ \{x_F\} \middle| a_{F_{\bar{f}}} \le \sum_{F_f \in E_f} x_{F_f F_{\bar{f}}} \le b_{F_{\bar{f}}}, \quad F_{\bar{f}} \in E_{\bar{f}}, f \in M \right\},$$

где M – заданное множество, $M \subseteq 2^{N(s)}$ и задача 2 будет заключаться в проверке, пусто ли множество $D(M)$, $M \subseteq 2^{N(s)}$. Допустим, что $a_{F_{\bar f}}$ и $b_{F_{\bar f}}$ – целые числа, $F_{\bar f} \in E_{\bar f}$, $f \in M$. Тогда можно утверждать, что система ограничений, определяющая множество $D(M)$, сводится к задаче L – поиска допустимой циркуляции в транспортной сети [9], если некоторое подмножество компонент решения задачи L удовлетворяет этой системе ограничений, и, напротив, система ограничений не совместна, … не имеет допустимого решения задача L. Так как система ограничений, задающая $D(M)$ зависит от множества M, $M \subseteq 2^{N(s)}$, проведем поиск таких множеств M, при которых система ограничений сводится к задаче L. Оказывается [10], что для подобного перехода достаточно существования такого разбиения $M_1 = \{ f_1^{(1)}, f_2^{(1)}, \ldots, f_{m_1}^{(1)} \}$ и $M_2 = \{ f_1^{(2)}, f_2^{(2)}, \ldots, f_{m_2}^{(1)} \}$ множества M, для которого $f_i^{(1)} \subseteq f_{i+1}^{(1)}$, $i = \overline{1, m_1 - 1}$, и $f_i^{(2)} \subseteq f_{i+1}^{(2)}$, $i = \overline{1, m_2 - 1}$.

Следовательно, если для множества M имеется указанное разбиение, то может быть сформирована транспортная сеть с двусторонними пропускными способностями дуг, поиск допустимой циркуляции в которой достигается путем построения отвечающей ей транспортной сети (с односторонними пропускными способностями дуг) и решения для нее задачи поиска максимального потока например, модифицированным алгоритмом расстановки пометок [11]. Если допустимый поток в сети с двусторонними пропускными способностями существует, то соответствующая система ограничений $D(M)$ совместна. Так как вычислительная сложность модифицированного алгоритма расстановки пометок имеет порядок $O(|V|^3)$, где V – множество узлов транспортной сети, то вопрос о совместности систем ограничений типа $D(M)$ решается за $O(|V|^3)$ арифметических операций.

З а м е ч а н и е 3. Для задачи объемно-календарного планирования, представленной во Введении, с учетом принятых критериев оптимальности $M = \{\{j, k\}, \{i, t\}, \{i\}, \{i, k, t\}, \varnothing\}$ и существует разбиение $M_1 = \{\{i, k, t\}, \{i, t\}, \{i\}, \varnothing\}$, $M_2 = \{\{j, k\}\}$, для которого выполняются условия сводимости. Тем самым для проверки совместности систем типа $S(\vec{z})$, соответствующих рассматриваемой задаче, можно строить транспортные сети с двусторонними пропускными способностями и решать задачи поиска допустимых потоков в построенных сетях. На последнем шаге работы алгоритма требуется получить максимальный поток, который и определит оптимальное решение исходной задачи.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Батищев Д.И., Гудман Э.Д., Норенков И.П. и др.* Метод декомпозиций для решения комбинаторных задач упорядочения и распределения ресурсов. // Информационные технологии. 1997, № 1. Р. 29–33.
2. *Батищев Д.И., Гудман Э.Д., Норенков И.П. и др.* Метод комбинирования эвристик для решения комбинаторных задач упорядочения и распределения ресурсов. // Информационные технологии. 1997, № 2. Р. 29–32.
3. *Прилуцкий М.Х., Кумагина Е.А.* Задача упорядочения работ как задача о назначениях // Вестник Нижегородского государственного университета. Математическое моделирование и оптимальное управление. 1999, Вып. 21. Р. 18–24.
4. *Прилуцкий М.Х., Власов С.Е.* Оптимальное распределение ресурсов в задачах календарного и объемно- календарного планирования // Тр. Нижегородского государственного технического университета. Системы обработки информации и управления. 2004. Вып. 11. Р. 31–36.
5. *Черников С.Н.* Линейные неравенства. М.: Наука, 1968.
6. *Motzkin T.S., Schoenberg I.J.* The relaxation method for linear inequalities // Caned. J. Moth. 1954. V. 6. № 3. P. 393–404.
7. *Прилуцкий М.Х.* Многокритериальное распределение однородного ресурса в иерархических системах // А и Т. 1996, № 2. Р. 24–29.
8. *Раскин Л.Г., Кириченко И.О.* Многоиндексные задачи линейного программирования. М.: Радио и связь, 1982.
9. *Форд Л., Фалкерсон Д.* Потоки в сетях. М.: МИР, 1966.
10. *Прилуцкий М.Х., Афраймович Л.Г.* “Условия совместности многоиндексных систем транспортного типа” Электронный журнал “Исследовано в России”, 2005 г., № 70, http://zhurnal.ape.relarn.ru/articles/2005/070.pdf
11. *Пападимитриу Х., Стайглиц К.* Комбинаторная оптимизация. Алгоритмы и сложность. М.: Мир, 1985.