Автоматика и телемеханика, № 1, 2013

Системный анализ и исследование операций

© 2013 г. **Л.Г. АФРАЙМОВИЧ, канд. физ.-мат. наук**
(Нижегородский государственный университет)

МНОГОИНДЕКСНЫЕ ТРАНСПОРТНЫЕ ЗАДАЧИ С 2-ВЛОЖЕННОЙ СТРУКТУРОЙ

Рассматриваются вопросы решения многоиндексных транспортных задач линейного и целочисленного линейного программирования. В качестве метода решения предлагается подход, основанный на исследовании сводимости многоиндексных транспортных задач к задаче поиска потока минимальной стоимости. Доказывается, что в рамках исследуемой схемы свед́ения условие 2-вложенности многоиндексных задач является необходимым и достаточным условием сводимости к задаче поиска потока минимальной стоимости.

1. Введение

Существует широкий класс прикладных задач распределения ресурсов, формализуемых в виде многоиндексных задач (целочисленного) линейного программирования транспортного типа. Примерами таких задач являются (см. [1–5]) задача объемно-календарного планирования, задача распределения мощностей каналов передачи данных, задача формирования портфеля заказов, задачи добычи и транспортировки газа, задача переработки газового конденсата и др. Многоиндексные задачи о назначениях (подкласс многоиндексных транспортных задач целочисленного линейного программирования) возникают, например, в теории расписаний [6, 7], в области компьютерного зрения [8, 9].

Для решения многоиндексных транспортных задач линейного программирования могут быть применены общие методы – симплекс метод, алгоритм Кармаркара [10, 11]. Существует ряд работ, посвященных непосредственно методам решения многоиндексных задач линейного программирования транспортного типа. Наиболее изучен класс двухиндексных задач [12]. Частные подклассы трех- и четырехиндексных задач рассматриваются, например, в [13–15]. В общей постановке класс многоиндексных задач исследуется в [13]. Условия, при которых удается понизить размерность и (или) сократить количество индексов многоиндексных транспортных задач, обсуждаются в [16]. Геометрические свойства множества допустимых решений многоиндексных транспортных систем линейных неравенств обсуждаются в [14, 17, 18].

Особый интерес представляет решение целочисленных многоиндексных задач линейного программирования транспортного типа. Как известно, матрица ограничений двухиндексной транспортной задачи абсолютно унимодулярна, и тем самым класс двухиндексных целочисленных задач линейного программирования разрешим за полиномиальное время [12]. Однако в общей постановке класс целочисленных многоиндексных транспортных задач является NP-трудным уже в трехиндексном случае [19]. Более того, для задач данного класса не существует полиномиальных ε-приближенных алгоритмов, иначе $\mathrm{P} = \mathrm{NP}$, данный результат также справедлив уже в трехиндексном случае [20]. При отсутствии дополнительных ограничений на параметры для решения многоиндексных целочисленных задач применимы лишь экспоненциальные по оценке вычислительной сложности общие методы целочисленного линейного программирования (например, метод ветвей и границ, метод Гомори [10, 21]). Среди целочисленных многоиндексных транспортных задач наиболее изученным является класс многоиндексных задач о назначениях. Широкий обзор результатов, связанных с анализом вычислительной сложности и построением приближенных алгоритмов решения специальных подклассов многоиндексных задач о назначениях, приведен в [22], дополнительно можно выделить работы [23–25].

Одним из перспективных направлений при разработке эффективных алгоритмов исследования многоиндексных задач линейного программирования является нахождение подклассов задач, для решения которых применимы потоковые методы. Важное влияние на развитие данного направления оказывают активные исследования в области сетевой оптимизации [26]. Существующие эффективные потоковые алгоритмы (см. [27, 28]) позволяют в случае сводимости задач линейного программирования к потоковым задачам построить алгоритмы их решения, обладающие более низкими оценками вычислительной сложности по сравнению с оценками общих методов решения задач линейного программирования. В ряде случаев сведение к потоковым задачам также позволяет предложить алгоритм решения исходной задачи, гарантирующий нахождение целочисленного решения, и тем самым позволяет выделять полиномиально разрешимые подклассы задач среди задач целочисленного линейного программирования. Возможность сводимости задач линейного программирования к потоковым задачам исследовалась в [29–32], важным различием которых являются применяемые концепции сводимости. Проблема сводимости многоиндексных транспортных задач линейного программирования является менее исследованной. Известно о сводимости двухиндексных задач к потоковым задачам [12]. Вопрос сводимости многоиндексных задач с произвольным числом индексов рассматривался в [1, 33, 34].

При исследовании многоиндексных систем линейных неравенств в [34] была сформулирована концепция сведения системы линейных неравенств к проблеме поиска допустимой циркуляции. Важная особенность концепции – существование соответствия между переменными исходной системы неравенств и простыми циклами вспомогательной сети. Предлагаемая схема сведения гарантирует, что произвольная допустимая циркуляции вспомогательной сети будет определять такое допустимое решение исходной системы неравенств, в котором переменным присваиваются значения потока вдоль соответствующих простых циклов. Величина потока вдоль простых циклов определяется через циклическую декомпозицию допустимой циркуляции.

В [1, 33] было показано, что специальные условия 2-вложенности множества подмножеств индексов, по которым происходит суммирование в системе ограничений задачи, являются достаточными (а в случае трехиндексных задач необходимыми и достаточными, иначе P = NP) для сводимости к задаче поиска потока минимальной стоимости. Особенностью концепции сводимости, применяемой в [1, 33], является существование соответствия между переменными исходной задачи и дугами вспомогательной сети. Предлагаемая схема сведения гарантирует, что произвольный оптимальный поток вспомогательной сети будет определять такое оптимальное решение исходной задачи, в котором переменным присваивается значение потока вдоль соответствующих дуг сети. В случае выполнения условий 2-вложенности решение многоиндексной задачи линейного программирования транспортного типа сводится к поиску потока минимальной стоимости в сети с $O(n)$ вершинами и $O(n)$ дугами, где n – количество переменных исходной задачи.

В данной работе продолжено исследование сводимости многоиндексных транспортных задач к потоковым задачам в рамках концепции сводимости, предложенной в [1, 33]. В разделе 2 приводится формализация многоиндексных задач линейного программирования транспортного типа, вводятся необходимые обозначения. Раздел 3 посвящен описанию применяемой концепции сводимости. В разделе 4 показано, что условие 2-вложенности одновременно необходимым и достаточным условием сводимости (в рамках исследуемой схемы сведения) многоиндексных транспортных задач к классу задач поиска потока минимальной стоимости. Полученный результат обобщает результаты сводимости, приведенные в [1, 33] и дает (в рамках исследуемой схемы сведения) исчерпывающий ответ на вопрос о сводимости класса многоиндексных задач к классу задач поиска потока минимальной стоимости. Найденная конструктивная схема сведения класса многоиндексных задач с 2-вложенной структурой оптимальна в том смысле, что сведение с асимптотически меньшими вычислительными затратами невозможно и сколь угодно большое увеличение вычислительных затрат на сведение не приводит к расширению класса сводимых многоиндексных задач.

2. Многоиндексные транспортные задачи

При постановке многоиндексных задач линейного программирования транспортного типа воспользуемся формализацией, предложенной в [13]. Пусть $s \in N$ и $N(s) = \{1, \ldots, s\}$. Каждому числу l поставим в соответствие параметр j_l, называемый индексом, который принимает значения из множества $J_l = \{1, \ldots, n_l\}$, где $n_l \geq 2$, $l \in N(s)$. Пусть $f = \{k_1, \ldots, k_t\} \subseteq N(s)$; $k_i < k_{i+1}$, $i = \overline{1, t-1}$. Набор значений индексов $F_f = (j_{k_1}, \ldots, j_{k_t})_f$ будем называть t-индексом. Множество всех t-индексов, соответствующих f, определим как $E_f = \{F_f | F \in J_{k_1} \times \ldots \times J_{k_t}\}$. Там где это не вызывает неоднозначности, будем опускать нижний индекс f в записи t-индексов. Компоненту j_i

набора F_f будем обозначать как $F_f(i) = j_i$, $i \in f$. Пусть $f' \subseteq f'' \subseteq N(s)$, тогда обозначим $F_{f'} = (F_{f''})_{f'}$, если $F_{f'} \in E_{f'}$, $F_{f''} \in E_{f''}$ и $F_{f'}(i) = F_{f''}(i)$, $i \in f'$. Если $F_{f'} \in E_{f'}$, $F_{f''} \in E_{f''}$, где $f', f'' \subseteq N(s)$ и $f' \cap f'' = \varnothing$, то через $F_{f'}F_{f''}$ обозначим такой набор, что $F_{f'}F_{f''} \in E_{f' \cup f''}$ и $(F_{f'}F_{f''})_{f'} = F_{f'}$, $(F_{f'}F_{f''})_{f''} = F_{f''}$. Далее определим $\overline{f} = N(s) \backslash f$, тогда согласно введенному обозначению $F_{N(s)} = F_f F_{\overline{f}}$, если $F_f = (F_{N(s)})_f$ и $F_{\overline{f}} = (F_{N(s)})_{\overline{f}}$.

Каждому набору F_f поставим в соответствие действительное число z_{F_f}, $F_f \in E_f$. Данное отображение множества t-индексов E_f в множество действительных чисел назовем (как и в [13]) t-индексной матрицей и обозначим через $\{z_{F_f}\}$. Рассмотрим s-индексную матрицу $\{z_{N(s)}\}$ и введем обозначение

$$\sum_{F_f \in E_f} z_{F_f F_{\overline{f}}} = \sum_{j_{k_1} \in J_{k_1}} \sum_{j_{k_2} \in J_{k_2}} \cdots \sum_{j_{k_t} \in J_{k_t}} z_{F_f\, F_{\overline{f}}}, \quad F_{\overline{f}} \in E_{\overline{f}}.$$

Введенное обозначение подсумм s-индексной матрицы будем использовать при формализации многоиндексных транспортных задач.

Пусть M – заданное множество, $M \subseteq 2^{N(s)}$; $\{a_{F_{\overline{f}}}\}$, $\{b_{F_{\overline{f}}}\}$ – заданные $|\overline{f}|$-индексные матрицы свободных коэффициентов, $0 \le a_{F_{\overline{f}}} \le b_{F_{\overline{f}}}$, $F_{\overline{f}} \in E_{\overline{f}}$, $f \in M$; $\{c_{F_{N(s)}}\}$ – заданная s-индексная матрица коэффициентов целевой функции; $\{x_{F_{N(s)}}\}$ – s-индексная матрица неизвестных. Тогда многоиндексная задача линейного программирования транспортного типа формализуется следующим образом:

$$a_{F_{\overline{f}}} \le \sum_{F_f \in E_f} x_{F_f F_{\overline{f}}} \le b_{F_{\overline{f}}}, \quad F_{\overline{f}} \in E_{\overline{f}}, \quad f \in M; \tag{1}$$

$$x_{F_{N(s)}} \ge 0, \quad F_{N(s)} \in E_{N(s)}; \tag{2}$$

$$\sum_{F_{N(s)} \in E_{N(s)}} c_{F_{N(s)}} x_{F_{N(s)}} \to \min. \tag{3}$$

Задачу (1)–(3) будем обозначать как $w(s; M; n_1, n_2, \ldots, n_s; \{a_{F_{\overline{f}}}\}, \{b_{F_{\overline{j}}}\}, f \in M; \{c_{F_{N(s)}}\})$, а класс всех многоиндексных задач вида (1)–(3) при фиксированном множестве M – как $W(M)$.

Если $w \in W(M)$, то ограничение вида (1) задачи w, соответствующее фиксированному множеству $f \in M$ и фиксированному набору $F_{\overline{f}} \in E_{\overline{f}}$, обозначим через $d(w, f, F_{\overline{f}})$. Матрицу системы ограничений задачи w обозначим через $Matr(w)$. Строку матрицы $Matr(w)$, определяемую двусторонним неравенством $d(w, f, F_{\overline{f}})$, – через $row(w, f, F_{\overline{f}})$, $F_{\overline{f}} \in E_{\overline{f}}$, $f \in M$. Столбец матрицы $Matr(w)$, соответствующий переменной $x_{F_{N(s)}}$, – через $col(w, F_{N(s)})$, $F_{N(s)} \in E_{N(s)}$. Пусть заданы последовательности $f^{(1)}, \ldots, f^{(k_1)} \in M$, $F^{(1)}_{\overline{f^{(1)}}} \in E_{\overline{f^{(1)}}}, \ldots, F^{(k_1)}_{\overline{f^{(k_1)}}} \in E_{\overline{f^{(k_1)}}}$ и $F^{(1)}_{N(s)}, \ldots, F^{(k_2)}_{N(s)} \in E_{N(s)}$, тогда подматрицу, образованную элементами матрицы $Matr(w)$, находящимися на пересечении строк $row(w, f^{(i)}, F^{(i)}_{\overline{f^{(i)}}})$, $i = \overline{1, k_1}$ и столбцов $col(w, F^{(j)}_{N(s)})$, $j = \overline{1, k_2}$, будем обозначать через $Matr(w;\ (f^{(i)}, F^{(i)}_{\overline{f^{(i)}}}),\ i = \overline{1, k_1};\ F^{(j)}_{N(s)},\ j = \overline{1, k_2})$.

3. Концепция сводимости

Приведем формализацию концепции сводимости, которую далее будем использовать при исследовании сводимости многоиндексных задач к потоковым алгоритмам.

Пусть $A \in R^{n \times m}$, $b, b^-, b^+ \in R^n$, $c \in R^m$ – заданные параметры, $x \in \in R^m$ – вектор неизвестных. Через $w(A, b, c)$ будем обозначать задачу линейного программирования $\min\{(c, x) | Ax \leq b, x \geq 0\}$; через $w(A, b^-, b^+, c)$ – задачу линейного программирования $\min\{(c, x) | b^- \leq Ax \leq b^+, x \geq 0\}$. Для удобства через $nrow(A)$ и $ncol(A)$ будем обозначать количество строк и столбцов матрицы A соответственно. Отметим, что задача $w(A, b^-, b^+, c)$ может быть описана с использованием обозначения вида $w(A, b, c)$. Тем не менее будем использовать обозначение $w(A, b^-, b^+, c)$ в случае, когда хотим подчеркнуть, что система ограничений задачи представляет собой систему двусторонних неравенств. Также будем рассматривать задачи целочисленного линейного программирования. Если $w = w(A, b, c)$ – задача линейного программирования, то через w_Z обозначим задачу целочисленного линейного программирования: $w_Z = \min\{(c, x) | Ax \leq b, x \in {Z_+}^{ncol(A)}\}$. Пусть W – произвольный класс задач линейного программирования. Соответствующий класс задач целочисленного линейного программирования определим как $W_Z = \{w_Z | w \in W\}$.

Далее рассмотрим два класса задач линейного программирования W' и W''. На содержательном уровне под сводимостью класса W' к классу W'' понимается возможность построения для произвольной задачи $w' \in W'$ соответствующей задачи $w'' \in W''$ таким образом, чтобы решение задачи w'' определяло решение задачи w'. При формализации конкретной схемы сведéния будем определять временные затраты и (или) конкретные вычислительные процедуры, связанные с:

– построением матрицы системы ограничений задачи w'' по исходным параметрам задачи w';

– построением свободных коэффициентов и коэффициентов целевой функции задачи w'' по исходным параметрам задачи w';

– построением решения задачи w' по решению задачи w''.

Предлагаемое далее обозначение схемы сведения вводится по аналогии с нотацией Р. Грэхема (R. Graham), используемой при классификации задач теории расписаний [35].

Определение 1. *Будем говорить, что класс W' является $t_1 - s_1 | t_2 - - s_2 | t_3 - s_3$ сводимым к классу W'', если для любой задачи $w' = w(A', b', c') \in \in W'$ можно за время $O(t_1)$ построить матрицу A'', за время $O(t_2)$ построить векторы b'', c'', что $w'' = w(A'', b'', c'') \in W''$ и при этом*

- *задача w' совместна (ограничена) тогда и только тогда, когда совместна (ограничена) задача w'';*
- *если известно оптимальное (допустимое) решение x'' задачи w'', то оптимальное (допустимое) решение x' задачи w' может быть построено за время $O(t_3)$.*

Здесь $(-s_1), (-s_2), (-s_3)$ – опциональные строковые обозначения вычислительных процедур, связанных с построением матрицы системы ограниче-

ний, свободных коэффициентов и коэффициентов целевой функции и с построением решения задачи соответственно.

Задачу w'' (см. определение 1) будем называть задачей, соответствующей задаче w'. Иногда для удобства функции оценки вычислительной сложности t_1, t_2, t_3 будем заменять на обозначения L или P, подразумевая соответственно линейные или полиномиальные от размера индивидуальной задачи w' функции.

В данной работе исследуется возможность сведения класса многоиндексных задач линейного программирования транспортного типа к классу задач поиска потока минимальной стоимости, который определяется следующим образом. Рассмотрим ориентированный граф $G = (V_G, A_G)$, $A_G \subseteq V_G \times \times V_G$, здесь V_G и A_G – множество вершин и дуг графа G соответственно. Пусть l_{ij}, u_{ij} – пропускные способности дуги (i,j); e_{ij} – стоимость дуги (i,j); x_{ij} – неизвестная величина потока вдоль дуги (i,j), $(i,j) \in A_G$. Тогда через $v(G; l_{ij}, u_{ij}, e_{ij}, (i,j) \in A_G)$ обозначим следующую задачу поиска потока минимальной стоимости:

$$\sum_{j:(i,j)\in A_G} x_{ij} - \sum_{j:(j,i)\in A_G} x_{ji} = 0, \quad i \in V_G,$$
$$l_{ij} \le x_{ij} \le u_{ij}, \quad (i,j) \in A_G,$$
$$x_{ij} \ge 0, \quad (i,j) \in A_G,$$
$$\sum_{(i,j)\in A_G} e_{ij} x_{ij} \to \min .$$

Обозначим через $Graph$ множество всех ориентированных графов. Класс задач поиска потока минимальной стоимости определим как $W_{Graph} = = \{v(G, l_{ij}, u_{ij}, e_{ij}, (i,j) \in A_G) | l_{ij}, u_{ij} \in Z_+, e_{ij} \in Z, (i,j) \in A_G, G \in Graph\}$.

Определение 2. Пусть W – класс задач линейного программирования с двусторонней системой линейных неравенств. Будем говорить, что класс W является $t_1|t_2 - equal|t_3 - edge$ сводимым к классу W_{Graph}, если класс W является $t_1|t_2|t_3$ сводимым к классу W_{Graph} и произвольная задача $w = w(A, b^-, b^+, c) \in W$, а также соответствующая ей задача $v = = v(G; l_{ij}, u_{ij}, e_{ij}, (i,j) \in A_G) \in W_{Graph}$ удовлетворяют следующим условиям: найдутся такие инъективные функции $\alpha : \{1, \ldots, nrow(A)\} \to A_G$, $\beta : \{1, \ldots, ncol(A)\} \to A_G$, что

- *$l_{\alpha(i)} = b_i^-$, $u_{\alpha(i)} = b_i^+$, $i \in \{1, \ldots, nrow(A)\}$; $l_{(u,v)} = 0$, $u_{uv} = b^*$, $(u,v) \in \in A_G \backslash \{\alpha(i) | i \in \{1, \ldots, nrow(A)\}\}$, где $b^* = \sum_{k=1}^{nrow(A)} b_k^+$;*
- *$e_{\beta(i)} = c_i$, $i \in \{1, \ldots, ncol(A)\}$; $e_{uv} = 0$, $(u,v) \in A_G \backslash \{\beta(i) | i \in \{1, \ldots, ncol(A)\}\}$;*
- *если x_{ij}, $(i,j) \in A_G$, является оптимальным (допустимым) решением задачи v, то $(x_{\beta(1)}, x_{\beta(2)}, \ldots, x_{\beta(ncol(A))})$ будет являться оптимальным (допустимым) решением задачи w.*

Замечание. В качестве величины b^* можно использовать любую достаточно большую величину, значение которой было бы эквивалентно отсутствию верхней пропускной способности дуги.

Таким образом, согласно определению 2 в случае $t_1|t_2 - equal|t_3 - edge$ сводимости класса W к классу W_{Graph} гарантируется, что если $w \in W$, $v = v(G; l_{ij}, u_{ij}, c_{ij}, (i,j) \in A_G) \in W_{Graph}$ и v является задачей, соответствующей задаче w, то при построении задачи поиска потока минимальной стоимости v пропускные способности и стоимости дуг в задаче определяются через коэффициенты задачи w, а решение задачи w находится через подмножество компонент решения задачи v. Тогда можно предложить алгоритм решения задачи w, основанный на решении соответствующей задачи v и имеющий вычислительную сложность $O(t_1+t_2+t_3+\mu(|V_G|, |A_G|))$, где $\mu(n,m)$ – вычислительная сложность алгоритма решения задачи поиска потока минимальной стоимости в сети с n вершинами и m дугами. Обзор оценок вычислительной сложности для известных потоковых алгоритмов можно найти, например, в [27, 28]. Далее в работе рассматриваются условия, при которых класс $W(M)$ является $t_1|t_2 - equal|t_3 - edge$ сводимым к классу W_{Graph}.

4. Условия сводимости многоиндексных задач

Вид задач линейного программирования класса $W(M)$ определяется заданным множеством M. Поэтому проблема заключается в нахождении условий, которым должно удовлетворять множество M, чтобы решение задач класса $W(M)$ могло быть найдено при помощи потоковых алгоритмов.

Теорема 1. Пусть $M \subseteq 2^{N(s)}$. Если класс $W(M)$ являлся $t_1|t_2 - equal|t_3 - edge$ сводимым к классу W_{Graph}, то для произвольной задачи $w \in W(M)$ матрица $Matr(w)$ является абсолютно унимодулярной.

Доказательство от противного. Пусть класс $W(M)$ является $t_1|t_2 - equal|t_3 - edge$ сводимым к классу W_{Graph} и найдется такая задача $w \in W(M)$, что матрица $Matr(w)$ не является абсолютно унимодулярной. Согласно [36] условие абсолютной унимодулярности матрицы необходимо и достаточно для целочисленности всех вершин многогранника соответствующей совместной системы линейных неравенств. Отсюда существует задача $w' \in W(M)$, удовлетворяющая следующим условиям:

– $Matr(w') = Matr(w)$;
– свободные коэффициенты задачи w' целочисленны;
– система ограничений задачи w' совместна;
– задача w' имеет единственное оптимальное решение, и оно нецелочисленно.

Класс $W(M)$ является $t_1|t_2 - equal|t_3 - edge$ сводимым к классу W_{Graph}. Тогда рассмотрим задачу $v \in W_{Graph}$, соответствующую задаче w'. По определению 2 пропускные способности сети в задаче поиска потока минимальной стоимости v целочисленны. Матрица системы ограничений задачи v абсолютно унимодулярна, отсюда задача v имеет целочисленное оптимальное решение. Тогда согласно определению 2 задача w' также имеет целочисленное оптимальное решение. Получаем противоречие. Таким образом, предположение неверно. Теорема доказана.

О п р е д е л е н и е 3. Множество M, $M \subseteq 2^{N(s)}$, называется k-вложенным, если существует разбиение множества M на k подмножеств $M_i = \{f_1^{(i)}, \ldots, f_{m_i}^{(i)}\}$, $i = \overline{1,k}$, что $f_j^{(i)} \subseteq f_{j+1}^{(i)}$, $j = \overline{1, m_i - 1}$, $i = \overline{1,k}$.

Ранее были найдены следующие достаточные условия сводимости.

Т е о р е м а 2 [1]. *Пусть $M \subseteq 2^{N(s)}$. Для того чтобы класс $W(M)$ являлся $L|L-equal|L-edge$ сводимым к классу W_{Graph}, достаточно, чтобы множество M было 2-вложенным.*

Конструктивная схема доказательства теоремы 1, предложенная в [1], в случае 2-вложенности множества M позволяет для каждой задачи $w \in W(M)$ построить соответствующую ей задачу $v = v(G; l_{ij}, u_{ij}, e_{ij}, (i,j) \in A_G) \in W_{Graph}$. При этом $|V_G| = O(|E_{N(s)}|)$, $|A_G| = O(|E_{N(s)}|)$, где величина $|E_{N(s)}|$ совпадает с количеством переменных задачи w. Согласно определению 2 в случае $L|L-equal|L-edge$ сводимости построение соответствующей потоковой задачи и нахождение решения исходной задачи по решению соответствующей задачи требует линейного времени. Пусть $\mu(n,m)$ – вычислительная сложность алгоритма решения задачи поиска потока минимальной стоимости в сети с n вершинами и m дугами. Тогда можно сформулировать следующее следствие.

С л е д с т в и е 1. Пусть $M \subseteq 2^{N(s)}$. Если множество M является 2-вложенным, то класс задач $W(M)$ разрешим за время $O(\mu(|E_{N(s)}|, |E_{N(s)}|))$.

Как известно [26], задача поиска потока минимальной стоимости (поиск допустимого потока) в сети с двусторонними пропускными способностями, содержащей n вершин и m дуг, сводится к задаче поиска потока минимальной стоимости заданной величины (задаче поиска максимального потока) в сети с односторонними пропускными способностями, содержащей $O(n)$ вершин и $O(n+m)$ дуг. Применим для поиска потока минимальной стоимости заданной величины алгоритм Орлина, предложенный в [27]. Для поиска максимального потока воспользуемся алгоритмом Голдберга-Рао [28]. Тогда согласно следствию 2, если множество M является 2-вложенным, то существуют алгоритмы поиск оптимального и допустимого решения задачи $w \in W(M)$, требующие $O(|E_{N(s)}|^2 \log^2 |E_{N(s)}|)$ и $O(|E_{N(s)}|^2 \log |E_{N(s)}|)$ вычислительных операций соответственно. Данный подход также применим при решении класса целочисленных многоиндексных задач $W_Z(M)$.

Далее покажем, что условие 2-вложенности является необходимым и достаточным условием сводимости многоиндексной транспортной задачи к задаче поиска потока минимальной стоимости.

О п р е д е л е н и е 4. Пусть $M \subseteq 2^{N(s)}$ и $g \subseteq N(s)$, тогда обозначим $M(g) = \{f \cap g | f \in M\}$.

О п р е д е л е н и е 5. Пусть $s_1 \leq s_2$ и $M_1 \subseteq 2^{N(s_1)}, M_2 \subseteq 2^{N(s_2)}$. Тогда обозначим $M_1 \prec M_2$, если существует подмножество $g \subseteq N(s_2), |g| = s_1$ и биективная функция $\pi : g \to N(s_1)$, что $M_1 \subseteq \bigcup\limits_{f \in M_2(g)} \{\{\pi(i) | i \in f\}\}$.

Содержательно определение 5 означает, что при «игнорировании» индексов множества $N(s_2) \backslash g$ для любой задачи класса $W(M_2)$ существует эквивалентная ей (с точностью до перенумерации индексов π) задача класса $W(M_1)$.

Л е м м а 1. *Пусть* $s_1 \leq s_2$, $M_1 \subseteq 2^{N(s_1)}$, $M_2 \subseteq 2^{N(s_2)}$ *и* $M_1 \prec M_2$. *Тогда, если существует задача* $w_1 \in W(M_1)$, *что матрица* $Matr(w_1)$ *не является абсолютно унимодулярной, то существует задача* $w_2 \in W(M_2)$, *что матрица* $Matr(w_2)$ *также не является абсолютно унимодулярной.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть выполняются условия леммы. Тогда по определению 5 существует подмножество $g \subseteq N(s_2)$, $|g| = s_1$ и биективная функция $\pi : g \to N(s_1)$, что $M_1 \subseteq \bigcup\limits_{f \in M_2(g)} \{\{\pi(i) | i \in f\}\}$.

Покажем, что для любой задачи $w_1 \in W(M_1)$ существует задача $w_2 \in \in W(M_2)$, что $Matr(w_1)$ является подматрицей $Matr(w_2)$. Рассмотрим произвольную задачу $w_1 \in W(M_1)$, $w_1 = w(s_1; n'_1, \ldots, n'_{s_1}; \{a'_{F_{\overline{f}}}\}, \{b'_{F_{\overline{f}}}\}, f \in M_1; \{c'_{F_{N(s_1)}}\})$ и выберем $w_2 \in W(M_2)$, $w_2 = w(s_2; n''_1, \ldots, n''_{s_2}; \{a''_{F_{\overline{f}}}\}, \{b''_{F_{\overline{f}}}\}, f \in M_2; \{c''_{F_{N(s_2)}}\})$ такую, что $n'_{\pi(i)} = n''_i$, $i \in g$. Далее рассмотрим произвольную строку $row(w_1, f_1, F_{\overline{f_1}})$ матрицы $Matr(w_1)$. Строка $row(w_1, f_1, F_{\overline{f_1}})$ также может быть задана как подматрица $Matr(w_1; f_1, F_{\overline{f_1}}; F_{N(s_1)} \in E_{N(s_1)})$. Выберем $f_2 \in M_2$ так, что $f_1 = \{\pi(i) | i \in f_2 \cap g\}$; и выберем $F_{\overline{f_2}} \in E_{\overline{f_2}}$, что $F_{\overline{f_2}}(i) = F_{\overline{f_1}}(\pi(i))$, $i \in \overline{f_2} \cap g$ и $F_{\overline{f_2}}(i) = 1$, $i \in \overline{f_2} \backslash g$. В строке матрицы $row(w_2, f_2, F_{\overline{f_2}})$ рассмотрим элементы, находящиеся на пересечении со столбцами $\{col(w_2, F_{N(s_2)}) | F_{N(s_2)} = F_g(1, \ldots, 1)_{\bar{g}}$, где $F_g \in E_g\}$. Можно увидеть, что матрицы $Matr(w_1; (f_1, F_{\overline{f_1}}); F_{N(s_1)} \in E_{N(s_1)})$ и $Matr(w_2; (f_2, F_{\overline{f_2}}); F_g(1, \ldots, 1)_{\overline{g}}, F_g \in E_g)$ размера $1 \times |E_{N(s_1)}|$ совпадают с точностью до перестановки столбцов, которая определяется функцией π. Отсюда матрица $Matr(w_1)$ является подматрицей $Matr(w_2)$.

Следовательно, если существует задача $w_1 \in W(M_1)$, что матрица $Matr(w_1)$ не является абсолютно унимодулярной (т.е. содержит минор, отличный от $0, 1, -1$), то существует задача $w_2 \in W(M_2)$ такая, что $Matr(w_2)$ также содержит минор отличный от $0, 1, -1$. Лемма доказана.

Л е м м а 2. *Пусть* $M \subseteq 2^{N(s)}$. *Если выполняется одно из следующих трех условий*:

1. $s = 3$, $\quad M = \{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}\}$,
2. $s = 3$, $\quad M = \{\{1\}, \{2\}, \{3\}\}$,
3. $s = 4$, $\quad M = \{\{1, 2\}, \{2, 3\}, \{1, 4\}\}$.

то существует $w \in W(M)$, *что матрица* $Matr(w)$ *не является абсолютно унимодулярной*:

Д о к а з а т е л ь с т в о. 1. Пусть $s = 3$, $M = \{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}\}$. По определению $n_1, n_2, n_3 \geq 2$, тогда выберем произвольную задачу $w \in W(M)$ и рассмотрим ее подматрицу

$$
\begin{aligned}
H = Matr(w;& \\
&(\{1,2\},(1)_{\{3\}}),(\{1,3\},(1)_{\{2\}}),(\{2,3\},(1)_{\{1\}}); \\
&(1,1,2)_{N(3)},(1,2,1)_{N(3)},(2,1,1)_{N(3)}).
\end{aligned}
$$

Можно увидеть, что $H = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ и $\det H = 2$.

2. Пусть $s = 3$, $M = \{\{1\}, \{2\}, \{3\}\}$. Рассмотрим произвольную задачу $w \in W(M)$ такую, что $n_1, n_2, n_3 \geq 3$ и рассмотрим ее подматрицу

$$\begin{aligned} H = Matr(w; \\ &(\{1\},(1,3)_{\{2,3\}}),(\{1\},(2,2)_{\{2,3\}}),(\{1\},(2,3)_{\{2,3\}}), \\ &(\{3\},(1,1)_{\{1,2\}}),(\{3\},(2,2)_{\{1,2\}})), \\ &(\{2\},(1,2)_{\{1,3\}}),(\{2\},(3,3)_{\{1,3\}}); \\ &(1,1,2)_{N(3)},(1,1,3)_{N(3)},(1,2,2)_{N(3)},(2,2,2)_{N(3)}, \\ &(2,2,3)_{N(3)},(3,1,3)_{N(3)},(3,2,3)_{N(3)}). \end{aligned}$$

Можно увидеть, что $H = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ и $\det H = 2$.

3. Пусть $s = 4$, $M = \{\{1, 2\}, \{2, 3\}, \{1, 4\}\}$. По определению $n_1, n_2, n_3 \geq 2$, тогда выберем произвольную задачу $w \in W(M)$ и рассмотрим ее подматрицу

$$\begin{aligned} H = Matr(w; \\ &(\{1,2\},(1,1)_{\{3,4\}}),(\{2,3\},(1,1)_{\{1,4\}}),(\{2,3\},(1,2)_{\{1,4\}}), \\ &(\{1,4\},(1,1)_{\{2,3\}}),(\{1,4\},(1,2)_{\{2,3\}}); \\ &(1,1,1,2)_{N(4)},(1,1,2,1)_{N(4)},(1,1,2,2)_{N(4)},(1,2,1,1)_{N(4)},(2,1,1,1)_{N(4)}). \end{aligned}$$

Можно увидеть, что $H = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ и $\det H = -2$. Лемма доказана.

Замечание. Матрицы, используемые при доказательстве леммы 2, были получены при помощи параллельной программной системы, разработанной студентом Катеровым А.С. [37]. Программная система выполнялась на супер-ЭВМ вычислительного центра коллективного пользования ФГУП «РФЯЦ-ВНИИЭФ».

Лемма 3. Пусть $M \subseteq 2^{N(s)}$. Для того, чтобы множество M было 1-вложенным, необходимо и достаточно, чтобы для любых $f_1, f_2 \in M$ существовали $k, l \in \{1, 2\}, k \neq l$, такие что $f_k \subseteq f_l$.

Доказательство. Доказательство необходимости. Пусть множество M является 1-вложенным, тогда согласно определению 3 множество M может быть представлено следующим образом $M = \{f_1^{(1)}, \ldots, f_{m_1}^{(1)}\}$, где $f_j^{(1)} \subseteq f_{j+1}^{(1)}$, $j = \overline{1, m_1 - 1}$. Рассмотрим произвольные $j_1, j_2 \in \{1, \ldots, m_1\}$. Если $j_1 \le j_2$, то $f_{j_1}^{(1)} \subseteq f_{j_2}^{(1)}$, иначе $f_{j_2}^{(1)} \subseteq f_{j_1}^{(1)}$.

Доказательство достаточности. Пусть для любых $f_1, f_2 \in M$ существуют $k, l \in \{1, 2\}$, $k \ne l$, такие что $f_k \subseteq f_l$. Упорядочим элементы множества M по неубыванию их мощности, $M = \{f_{t_1}, \ldots, f_{t_{|M|}}\}$, $|f_{t_j}| \le |f_{t_{j+1}}|$, $j = \overline{1, |M| - 1}$. Так как $f_{t_j} \ne f_{t_{j+1}}$ и $|f_{t_j}| \le |f_{t_{j+1}}|$, то $f_{t_{j+1}} \not\subseteq f_{t_j}$, тогда по условию $f_{t_j} \subseteq f_{t_{j+1}}$, $j = \overline{1, |M| - 1}$. Тогда по определению 3 множество M является 1-вложенным. Лемма доказана.

Теорема 3. Пусть $M \subseteq 2^{N(s)}$. Для того, чтобы множество M было 2-вложенным, необходимо и достаточно, чтобы для любых $f_1, f_2, f_3 \in M$ существовали $k, l \in \{1, 2, 3\}, k \ne l$, такие что $f_k \subseteq f_l$.

Доказательство. Доказательство необходимости. Пусть множество M является 2-вложенным, тогда согласно определению 3 существует разбиение множества M на 2 подмножества $M_1 = \{f_1^{(1)}, \ldots, f_{m_1}^{(1)}\}$, $M_2 = \{f_1^{(2)}, \ldots, f_{m_2}^{(2)}\}$, что $f_j^{(i)} \subseteq f_{j+1}^{(i)}$, $j = \overline{1, m_i - 1}$, $i = \overline{1, 2}$. Рассмотрим произвольные $f_1, f_2, f_3 \in M$. Существуют $k, l \in \{1, 2, 3\}, k \ne l$ и $t \in \{1, 2\}$, что $f_k, f_l \in M_t$. Если $|f_k| \le |f_l|$, то $f_k \subseteq f_l$, иначе $f_l \subseteq f_k$.

Доказательство достаточности. Пусть для любых $f_1, f_2, f_3 \in M$ существуют $k, l \in \{1, 2, 3\}$, $k \ne l$, что $f_k \subseteq f_l$. Проведем доказательство конструктивно, построив алгоритм нахождения разбиения $M_1 = \{f_1^{(1)}, \ldots, f_{m_1}^{(1)}\}$, $M_2 = \{f_1^{(2)}, \ldots, f_{m_2}^{(2)}\}$ множества M такого, что $f_j^{(i)} \subseteq f_{j+1}^{(i)}$, $j = \overline{1, m_i - 1}$, $i = \overline{1, 2}$.

Упорядочим элементы множества M по неубыванию их мощности, $M = \{g_1, \ldots, g_{|M|}\}$, $|f_{t_j}| \le |f_{t_{j+1}}|$, $j = \overline{1, |M| - 1}$. Алгоритм:

Шаг 1. Пусть $M_1, M_2 := \varnothing$, $j := 1$. Переход на шаг 2.

Шаг 2. Упорядочим элементы множеств M_1, M_2 по неубыванию их мощности $M_1 = \{f_1^{(1)}, \ldots, f_{m_1}^{(1)}\}$, $M_2 = \{f_1^{(2)}, \ldots, f_{m_2}^{(2)}\}$, где $f_k^{(i)} \le f_{k+1}^{(i)}$, $k = \overline{1, m_i - 1}$, $i = \overline{1, 2}$. Если $j > |M|$, то алгоритм завершен; иначе переход на шаг 3.

Шаг 3. Если существует $l \in \{1, 2\}$, что $f_{m_l}^{(l)} \subseteq g_j$, то $M_l := M_l \cup \{g_j\}$, $j := j + 1$, переход на шаг 2; иначе переход на шаг 4.

Шаг 4. Обозначим $I_l = \{f_i^{(l)} | f_s^l \not\subseteq g_j, s = \overline{i, m_l}, i \in \{1, \ldots, m_l\}\}$, $i_l^* = \min\limits_{i | f_i^{(l)} \in I_l} i$, $l = \overline{1, 2}$. Рассмотрим множество $I = I_1 \cup I_2$ и упорядочим его элементы по неубыванию их мощности $I = \{q_1, \ldots, q_{|I|}\}$, $|q_s| \le |q_{s+1}|$, $s = \overline{1, |I| - 1}$. Пусть

$$t = \begin{cases} 1, \text{ если } q_1 \in I_1, \\ 2, \text{ если } q_1 \in I_2, \end{cases} \qquad r = \begin{cases} 1, \text{ если } q_1 \notin I_1, \\ 2, \text{ если } q_1 \notin I_2. \end{cases}$$

Далее $M_t := I_r \cup M_t$, $M_r := \{g_j\} \cup M_r \backslash I_r$, $j := j + 1$, переход на шаг 2.

Приведем доказательство корректности построенного алгоритма. По построению к началу выполнения каждого из очередных шагов 2 справедливо

$M_1 \cap M_2 = \varnothing$ и очередной элемент g_j добавляется в M_1 либо в M_2. Таким образом, после завершения работы алгоритма M_1, M_2 – разбиение множества M. Далее покажем, что перед каждым из шагов 2 множества M_1, M_2 являются 1-вложенными.

Изначально $M_1, M_2 = \varnothing$ и согласно определению 3 являются 1-вложенными. Пусть $M_i = \{f_1^{(i)}, \ldots, f_{m_i}^{(i)}\}$, $f_j^{(i)} \subseteq f_{j+1}^{(i)}$, $j = \overline{1, m_i - 1}$, $i = \overline{1,2}$. Если на шаге 3 найдется $l \in \{1,2\}$, что $f_{m_l}^{(l)} \subseteq g_j$, то $M_l := M_l \cup \{g_j\}$ и так как $f_j^{(l)} \subseteq f_{j+1}^{(l)}$, $j = \overline{1, m_l - 1}$, то множество M_l будет являться 1-вложенным. В случае перехода на шаг 4 справедливо $f_{m_1}^{(1)}, f_{m_2}^{(2)} \not\subseteq g_j$, тогда $f_{m_1}^{(1)} \in I_1$, $f_{m_2}^{(2)} \in I_2$, следовательно, $I_1, I_2 \neq \varnothing$ и существуют величины i_1^*, i_2^*. Схематично множества M_1 и M_2 можно отобразить так, как показано на рис. 1 (здесь элементы 1-вложенного множества $M_i \backslash I_i$ являются подмножествами элементов 1-вложенного множества I_i, $i = \overline{1,2}$):

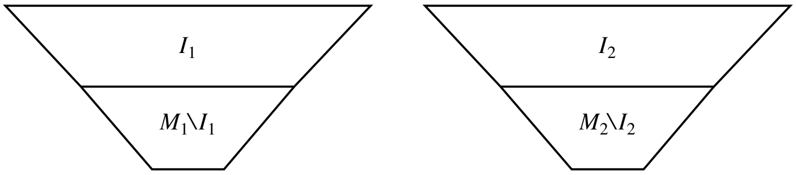

Рис. 1.

По построению $q \not\subseteq g_j$, $q \in I$. С другой стороны, согласно построенному алгоритму $|g_j| \geq q$, $q \in I$, отсюда $g_j \not\subseteq q, q \in I$. Рассмотрим произвольные $q' \in I_1$, $q'' \in I_2$. Как уже было показано, $g_j \not\subseteq q', q''$ и $q', q'' \not\subseteq g_j$, тогда согласно условию леммы выполняется одно из следующих соотношений: $q' \subseteq q''$ или $q'' \subseteq q'$. Отсюда по лемме 3 множество I является 1-вложенным и $q_s \subseteq q_{s+1}$, $s = \overline{1, |I| - 1}$. По построению $q_1 \in I_t$. Далее, либо $M_t \backslash I_t = \varnothing$, либо $M_t \backslash I_t = \{f_1^{(t)}, \ldots, f_{i_t^* - 1}^{(t)}\}$, и $f_{i_t^* - 1}^{(t)} \subseteq f_{i_t^*}^{(t)} = q_1$. Отсюда построенное множество $M_t := I \cup M_t \backslash I_t$ является 1-вложенным. Далее, либо $M_r \backslash I_r = \varnothing$, либо $M_r \backslash I_r = \{f_1^{(r)}, \ldots, f_{i_r^* - 1}^{(r)}\}$, и по построению $f_{i_r^* - 1}^{(r)} \subseteq g_j$. Отсюда построенное множество $M_r := \{g_j\} \cup M_r \backslash I_r$ является 1-вложенным. Схематично построенные на шаге 4 множества M_1 и M_2 отображены на рис. 2 (здесь элементы 1-вложенного множества $M_t \backslash I_t$ являются подмножествами элементов 1-вложенного множества $I_r \cup I_t$, а элементы 1-вложенного множества $M_r \backslash I_r$ являются подмножествами множества g_j):

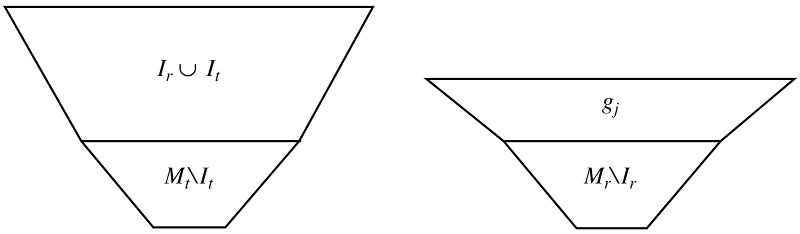

Рис. 2.

Следовательно, после завершения работы алгоритма построенные множества M_1, M_2 представляют собой разбиение множества M и являются 1-вложенными. Теорема доказана.

Рассмотрим произвольные множества $f_1, f_2, f_3 \subseteq N(s)$, для которых выполняется следующее условие:

$$f_1 \not\subset f_2, f_3, \quad f_2 \not\subset f_1, f_3, \quad f_3 \not\subset f_1, f_2. \tag{4}$$

Условие (4) выполняется тогда и только тогда, когда существуют такие элементы $a_{ij} \in N(s)$, $j \in \{1,2,3\} \backslash \{i\}$, $i \in \{1,2,3\}$, что

$$\begin{aligned}
&a_{12} \in f_1, a_{12} \notin f_2, \quad a_{21} \in f_2, a_{21} \notin f_1, \quad a_{31} \in f_3, a_{31} \notin f_1,\\
&a_{13} \in f_1, a_{13} \notin f_3, \quad a_{23} \in f_2, a_{23} \notin f_3, \quad a_{32} \in f_3, a_{32} \notin f_2.
\end{aligned}$$

Множество $A = \{a_{ij} | a_{ij} \in f_i,\ a_{ij} \notin f_j,\ j \in \{1,2,3\} \backslash \{i\},\ i \in \{1,2,3\}\}$ будем называть множеством, разделяющим f_1, f_2, f_3. Обозначим через $A(f_1, f_2, f_3)$ множество всех разделяющих f_1, f_2, f_3 множеств. Из теоремы 3, используя понятие разделяющего множества, можно сформулировать следующее

Следствие 2. Пусть $M \subseteq 2^{N(s)}$. Для того, чтобы множество M было 2-вложенным, необходимо и достаточно, чтобы $A(f_1, f_2, f_3) = \varnothing$ для любых $f_1, f_2, f_3 \in M$.

Если $A \in A(f_1, f_2, f_3)$, $A = \{a_{ij} | a_{ij} \in f_i, a_{ij} \notin f_j, j \in \{1,2,3\} \backslash \{i\}, i \in \{1,2,3\}\}$, то через $p(A)$ будем обозначать величину

$$p(A) = |\{a_{12}\} \cup \{a_{13}\}| + |\{a_{21}\} \cup \{a_{23}\}| + |\{a_{31}\} \cup \{a_{32}\}|.$$

Пусть $d^*(f_1, f_2, f_3) = \min\limits_{A \in A(f_1, f_2, f_3)} |A|$. Тогда рассмотрим задачу выбора среди множеств, разделяющих f_1, f_2, f_3, множества мощности $d^*(f_1, f_2, f_3)$ с максимальным значением величины $p(A)$:

$$A^*(f_1, f_2, f_3) = \mathop{\arg\max}\limits_{A \in A(f_1, f_2, f_3) | d^*(f_1, f_2, f_3) = |A|} p(A). \tag{5}$$

Решение $A^*(f_1, f_2, f_3)$ задачи (5) обладает следующим важным свойством.

Лемма 4. Пусть $f_1, f_2, f_3 \subseteq N(s)$, $A(f_1, f_2, f_3) \neq \varnothing$ и $A^*(f_1, f_2, f_3) = \{a^*_{ij} | a^*_{ij} \in f_i, a^*_{ij} \notin f_j, j \in \{1,2,3\} \backslash \{i\}, i \in \{1,2,3\}\}$. Если $a^*_{ij} \in f_k$, то $a^*_{ij} = a^*_{kj}$, где $i, j, k \in \{1,2,3\}$, $i \neq j$, $i \neq k$, $j \neq k$.

Доказательство от противного. Предположим, что выполняются условия леммы и найдутся такие $i, j, k \in \{1,2,3\}$, $i \neq j$, $i \neq k$, $j \neq k$, что $a^*_{ij} \in f_k$, но $a^*_{ij} \neq a^*_{kj}$. Рассмотрим множество $A' = \{a'_{st} |\ s \in \{1,2,3\} \backslash \{t\},\ t \in \{1,2,3\}\}$, построенное следующим образом:

$$\begin{aligned}
a'_{ij} = a^*_{ij}, \quad a'_{ji} = a^*_{ji}, \quad a'_{ki} = a^*_{ki},\\
a'_{ik} = a^*_{ik}, \quad a'_{jk} = a^*_{jk}, \quad a'_{kj} = a^*_{ij}.
\end{aligned}$$

По предположению $a'_{kj} = a^*_{ij} \in f_k$, при этом по построению $a'_{kj} = a^*_{ij} \notin f_j$. Отсюда $a'_{st} \in f_s$, $a'_{st} \notin f_t$, $t \in \{1,2,3\} \backslash \{s\}$, $s \in \{1,2,3\}$ и $A' \in A(f_1, f_2, f_3)$. Проведем доказательство, рассмотрев следующие два возможных случая.

1. Пусть $a^*_{kj} = a^*_{ki}$. Так как $a'_{ki} = a^*_{ki} = a^*_{kj}$, $a'_{kj} = a'_{ij} = a^*_{ij}$, то $|A'| =$

$$
\begin{aligned}
&= |\{a'_{ij}\} \cup \{a'_{ik}\} \cup \{a'_{ji}\} \cup \{a'_{jk}\} \cup \{a'_{ki}\} \cup \{a'_{kj}\}| \ = \\
&= |\{a'_{ij}\} \cup \{a'_{ik}\} \cup \{a'_{ji}\} \cup \{a'_{jk}\} \cup \{a'_{ki}\}| \ = \\
&= |\{a^*_{ij}\} \cup \{a^*_{ik}\} \cup \{a^*_{ji}\} \cup \{a^*_{jk}\} \cup \{a^*_{ki}\}| \ = \\
&= |\{a^*_{ij}\} \cup \{a^*_{ik}\} \cup \{a^*_{ji}\} \cup \{a^*_{jk}\} \cup \{a^*_{ki}\} \cup \{a^*_{kj}\}| \ = |A^*(f_1, f_2, f_3)|.
\end{aligned}
$$

По построению $a'_{kj} = a^*_{ij} \in f_i$ и $a'_{ki} = a^*_{ki} \notin f_i$, таким образом, $a'_{kj} \neq a'_{ki}$. По условию $a^*_{kj} = a^*_{ki}$. Отсюда $p(A') =$

$$
\begin{aligned}
&= |\{a'_{ij}\} \cup \{a'_{ik}\}| + |\{a'_{ji}\} \cup \{a'_{jk}\}| + |\{a'_{ki}\} \cup \{a'_{kj}\}| = \\
&= |\{a^*_{ij}\} \cup \{a^*_{ik}\}| + |\{a^*_{ji}\} \cup \{a^*_{jk}\}| + 2
\end{aligned}
$$

и $p(A^*(f_1, f_2, f_3)) =$

$$
\begin{aligned}
&= |\{a^*_{ij}\} \cup \{a^*_{ik}\}| + |\{a^*_{ji}\} \cup \{a^*_{jk}\}| + |\{a^*_{ki}\} \cup \{a^*_{kj}\}| \ = \\
&= |\{a^*_{ij}\} \cup \{a^*_{ik}\}| + |\{a^*_{ji}\} \cup \{a^*_{jk}\}| + 1.
\end{aligned}
$$

Следовательно, $p(A') = p(A^*(f_1, f_2, f_3)) + 1$. Получаем противоречие.

2. Пусть $a^*_{kj} \neq a^*_{ki}$. По предположению $a^*_{kj} \neq a^*_{ij}$. По построению $a^*_{kj} \in f_k$ и $a^*_{ik} \notin f_k$, тогда $a^*_{kj} \neq a^*_{ik}$. Далее, по построению $a^*_{kj} \notin f_j$, $a^*_{ji}, a^*_{jk} \in f_j$, тогда $a^*_{kj} \neq a^*_{ji}, a^*_{jk}$. Отсюда $|A'| =$

$$
\begin{aligned}
&= |\{a'_{ij}\} \cup \{a'_{ik}\} \cup \{a'_{ji}\} \cup \{a'_{jk}\} \cup \{a'_{ki}\} \cup \{a'_{kj}\}| = \\
&= |\{a'_{ij}\} \cup \{a'_{ik}\} \cup \{a'_{ji}\} \cup \{a'_{jk}\} \cup \{a'_{ki}\}| = \\
&= |\{a^*_{ij}\} \cup \{a^*_{ik}\} \cup \{a^*_{ji}\} \cup \{a^*_{jk}\} \cup \{a^*_{ki}\}| = \\
&= |A^*(f_1, f_2, f_3) \backslash \{a^*_{kj}\}| = |A^*(f_1, f_2, f_3)| - 1.
\end{aligned}
$$

Получаем противоречие. Таким образом, предположение неверно. Лемма доказана.

Л е м м а 5. *Пусть $M \subseteq 2^{N(s)}$. Если множество M не является 2-вложенным, то существует задача $w \in W(M)$, что матрица $Matr(w)$ не является абсолютно унимодулярной.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть множество $M \subseteq 2^{N(s)}$ не является 2-вложенным. Тогда согласно следствию 2 найдутся такие $f_1, f_2, f_3 \in M$, что $A(f_1, f_2, f_3) \neq \varnothing$. Рассмотрим множество $A^*(f_1, f_2, f_3) = \{a^*_{ij} | a^*_{ij} \in f_i, a^*_{ij} \notin f_j,$ $j \in \{1, 2, 3\} \backslash \{i\},\ i \in \{1, 2, 3\}\}$, являющееся решением задачи (5). Схематично будем представлять возможные комбинации множества $A^*(f_1, f_2, f_3)$ в виде графа G_f с множеством вершин $V = \{ij|\ j \in \{1, 2, 3\} \backslash \{i\},\ i \in \{1, 2, 3\}\}$ и множеством дуг $\{(ij, kl) | a^*_{ij} = a^*_{kl},\ ij \neq kl,\ ij, kl \in V\}$. Проведем доказательство, рассмотрев следующее возможные два случая.

1. Пусть для каждого $i \in \{1, 2, 3\}$ существует $t_i \in \{1, 2, 3\} \backslash \{i\}$, что $a^*_{it_i} \notin f_{k_i}$, где $k_i \in \{1, 2, 3\} \backslash \{i, t_i\}$. Рассмотрим элементы $a^*_{1t_1}, a^*_{2t_2}, a^*_{3t_3}$. По построению

$$a^*_{1t_1} \notin f_2, f_3 \quad a^*_{2t_2} \notin f_1, f_3 \quad a^*_{3t_3} \notin f_1, f_2.$$

Тогда подграф графа G_f, индуцированный подмножеством вершин $\{1t_1, 2t_2, 3t_3\}$, будет иметь вид (рис. 3)

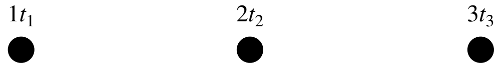

Рис. 3.

Отсюда $\{\{a^*_{1t_1}\}, \{a^*_{2t_2}\}, \{a^*_{3t_3}\}\} \subseteq M(\{a^*_{1t_1}, a^*_{2t_2}, a^*_{3t_3}\})$ и по определению 5 $\{\{1\}, \{2\}, \{3\}\} \prec M$. Тогда согласно леммам 1, 2 найдется $w \in W(M)$, что $Matr(w)$ не является абсолютно унимодулярной.

2. Пусть существует $i \in \{1, 2, 3\}$, что для каждого $j \in \{1, 2, 3\} \backslash \{i\}$, выполняется $a^*_{ij} \in f_k$, где $k \in \{1, 2, 3\} \backslash \{i, j\}$. Не уменьшая общности, будем считать, что $i = 1$, в противном случае перенумеруем элементы. Тогда $a^*_{12} \in f_3$, $a^*_{13} \in \in f_2$. Согласно лемме 4 $a^*_{12} = a^*_{32}$, $a^*_{13} = a^*_{23}$. По построению $a^*_{kl} \in f_k$, $a^*_{kl} \notin f_l$, $l \in \{1, 2, 3\} \backslash \{k\}$, $k \in \{1, 2, 3\}$. Следовательно, $a^*_{kl} \neq a^*_{lm}$, $m, k \in \{1, 2, 3\} \backslash \{l\}, l \in \in \{1, 2, 3\}$. По построению $a^*_{12} \in f_3$, $a^*_{13} \notin f_3$, отсюда $a^*_{12} \neq a^*_{13}$. По построению $a^*_{23} = a^*_{13} \in f_1$, $a^*_{21} \notin f_1$, отсюда $a^*_{21} \neq a^*_{23}$; $a^*_{32} = a^*_{12} \in f_1$, $a^*_{31} \notin f_1$, отсюда $a^*_{31} \neq a^*_{32}$. Далее возможен один из двух подслучаев: $a^*_{21} = a^*_{31}$ или $a^*_{21} \neq a^*_{31}$.

2.1. Пусть $a^*_{21} = a^*_{31}$. Тогда граф G_f будет иметь вид (рис. 4)

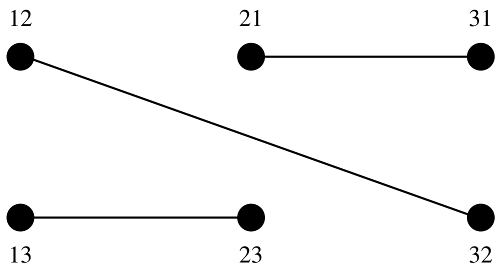

Рис. 4.

Отсюда $\{\{a^*_{12}, a^*_{13}\}, \{a^*_{13}, a^*_{21}\}, \{a^*_{12}, a^*_{21}\}\} \subseteq M(\{a^*_{12}, a^*_{13}, a^*_{21}\})$ и по определению 5 $\{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}\} \prec M$. Тогда согласно леммам 1, 2 найдется $w \in \in W(M)$, что $Matr(w)$ не является абсолютно унимодулярной.

2.2. Пусть $a^*_{21} \neq a^*_{31}$. Тогда граф G_f будет иметь вид (рис. 5)

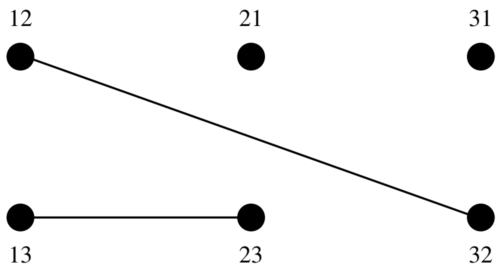

Рис. 5.

Отсюда $\{\{a^*_{12}, a^*_{13}\}, \{a^*_{13}, a^*_{21}\}, \{a^*_{12}, a^*_{31}\}\} \subseteq M(\{a^*_{12}, a^*_{13}, a^*_{21}, a^*_{31}\})$ и по определению 5 $\{\{1,2\},\{2,3\},\{1,4\}\} \prec M$. Тогда согласно леммам 1, 2 найдется $w \in$ $\in W(M)$, что матрица системы ограничений задачи w не является абсолютно унимодулярной. Лемма доказана.

Теорема 4. Пусть $M \subseteq 2^{N(s)}$. Для того чтобы класс $W(M)$ являлся $t_1|t_2 - equal|t_3 - edge$ сводимым к классу W_{Graph}, где $t_1(n), t_2(n), t_3(n) \geq n$, $n \in N$, необходимо и достаточно, чтобы множество M было 2-вложенным.

Доказательство. Доказательство достаточности автоматически вытекает из теоремы 2.

Доказательство необходимости. Проведем доказательство от противного. Пусть класс $W(M)$ является $t_1|t_2-equal|t_3-edge$ сводимым к классу W_{Graph}, однако множество M не является 2-вложенным. Тогда согласно лемме 5 существует задача $w \in W(M)$, что матрица $Matr(w)$ не является абсолютно унимодулярной. С другой стороны, из теоремы 1 следует, что матрица $Matr(w)$ является абсолютно унимодулярной. Получаем противоречие, таким образом, предположение неверно. Теорема доказана.

Согласно теореме 4 найденное условие 2-вложенности является необходимыми и достаточным условием сводимости (согласно введенной концепции сведения) многоиндексных задач к задаче поиска потока минимальной стоимости. Более того оказывается, предложенная в конструктивном доказательстве теоремы 2 схема сведения класса многоиндексных задач $W(M)$ с 2-вложенным множеством M, требующая линейных вычислительных затрат, является оптимальной в том смысле, что

- сведéние с использованием вычислительных затрат, асимптотически меньших линейных, невозможно (так как необходимо просмотреть все исходные данные);
- сколь угодно большое увеличение вычислительных затрат на сведéние не приводит к расширению класса многоиндексных задач, сводимых к классу W_{Graph}.

Таким образом, в совокупности теоремы 2 и 4 представляют собой исчерпывающий результат исследования $t_1|t_2 - equal|t_3 - edge$ сводимости классов многоиндексных задач $W(M)$к классу задач поиска потока минимальной стоимости W_{Graph}.

5. Заключение

В работе проведено исследование $t_1|t_2 - equal|t_3 - edge$ сводимости многоиндексных транспортных задач к классу задач поиска потока минимальной стоимости. Рассматриваемая концепция сведéния позволяет ввести соответствие между переменными исходной задачи и дугами вспомогательной сети. При этом поток минимальной стоимости вспомогательной сети определяет такое оптимальное решение исходной задачи, в котором переменным присваивается значение потока на соответствующих дугах сети.

Выделен класс многоиндексных транспортных задач с 2-вложенной структурой, для которых доказана их $L|L - equal|L - edge$ сводимость к классу задач поиска потока минимальной стоимости. На основании сводимости построен алгоритм решения многоиндексных транспортных задач с 2-вложенной структурой. Алгоритм в случае применения для поиска потока минимальной стоимости метода Орлина [27] требует $O(|E_{N(s)}|^2 \log^2 |E_{N(s)}|)$ вычислительных операций, где величина $|E_{N(s)}|$ равна количеству переменных многоиндексной задачи. Построенный алгоритм также применим для поиска целочисленного решения.

Основанным результатом работы является доказательство того, что условие 2-вложенности множества $M \subseteq 2^{N(s)}$ представляет собой необходимое и достаточное условие $t_1|t_2-equal|t_3-edge$ сводимости класса $W(M)$ к классу W_{Graph}. Полученный результат обобщает результаты сводимости, приведенные ранее в [1, 33] и дает (в рамках исследуемой схемы сведéния) исчерпывающий ответ на вопрос о сводимости класса многоиндексных транспортных задач к классу задач поиска потока минимальной стоимости. При этом найденная конструктивная схема сведéния класса многоиндексных задач с 2-вложенной структурой оптимальна в том смысле, что сведéние с асимптотически меньшими вычислительными затратами невозможно и сколь угодно большое увеличение вычислительных затрат на сведéние не приводит к расширению класса сводимых многоиндексных задач.

Дальнейшее направление исследований связано с выделением подклассов многоиндексных задач, сводимых к частным подклассам задачи поиска потока минимальной стоимости, для решения которых известны более эффективные алгоритмы (например, поиск потока в древовидной сети [38], в сети с планарной структурой [39]). Интерес представляет разработка новых концепций сводимости, позволяющих расширять область применения потоковых алгоритмов при решении многоиндексных задач.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Афраймович Л.Г., Прилуцкий М.Х.* Многоиндексные задачи распределения ресурсов в иерархических системах // АиТ. 2006. № 6. С. 194–205.

   Afraimovich L.G., Prilutskii M.Kh. Multiindex Resource Distributions for Hierarchical Systems // Autom. Remote Control. 2006. V. 67. No. 6. P. 1007–1016.

2. *Афраймович Л.Г., Прилуцкий М.Х.* Многопродуктовые потоки в древовидных сетях // Изв. РАН. Теория и системы управления. 2008. № 2. С. 57–63.

3. *Прилуцкий М.Х.* Многокритериальные многоиндексные задачи объемно-календарного планирования // Изв. РАН. Теория и системы управления. 2007. № 1. С. 78–82.

4. *Прилуцкий М.Х.* Многокритериальное распределение однородного ресурса в иерархических системах // АиТ. 1996. № 2. С. 139–146.

   Prilutskii M.Kh. Multicriteria Distribution of a Homogeneous Resource in Hierarchical Systems // Autom. Remote Control. 1996. V. 57. No. 2. Part 2. P. 266–271.

5. *Костюков В.Е., Прилуцкий М.Х.* Распределение ресурсов в иерархических системах. Оптимизационные задачи добычи, транспорта газа и переработки газового конденсата. Нижний Новгород: Изд-во Нижегород. гос. ун-та, 2010.

6. *Lim A., Rodrigues B., Zhang X.* Scheduling sports competitions at multiple venues – Revisited // Eur. J. Oper. Res. 2006. V. 175. P. 171–186.

7. *Gunawan A., Ng K.M., Poh K.L.* Solving the teacher assignment-course scheduling problem by a hybrid algorithm // Int. J. Comput. Inform. Engin. 2007. V. 1. No. 2. P. 137–142.
8. *Storms P.P.A., Spieksma F.C.R.* An LP-based algorithm for the data association problem in multitarget tracking // Comput. Oper. Res. 2003. V. 30. No. 7. P. 1067–1085.
9. *Poore A.B.* Multidimensional assignment formulation of data association problems arising from multitarget and multisensor tracking // Comput. Optim. Appli. 1994. V. 3. No. 1. P. 27–57.
10. *Схрейвер А.* Теория линейного и целочисленного программирования. В 2 т. М.: Мир, 1991.
11. *Пападимитриу Х., Стайглиц К.* Комбинаторная оптимизация. Алгоритмы и сложность. М.: Мир, 1985.
12. *Гейл Д.* Теория линейных экономических моделей. М.: Мир, 1969.
13. *Раскин Л.Г., Кириченко И.О.* Многоиндексные задачи линейного программирования. М.: Радио и связь, 1982.
14. *Емеличев В.А., Ковалев М.М., Кравцов М.К.* Многогранники, графы, оптимизация. М.: Наука, 1981.
15. *Bandopadhyaya L., Puri M.C.* Impaired flow multi-index transportation problem with axial constraints // J. Austral. Math. Soc. Ser. B. 29(3). 1988. P. 296–309.
16. *Junginger W.* On representatives of multi-index transportation problems // Eur. J. Oper. Res. 1993. V. 66(3). P. 353–371.
17. *De Loera J.A., Kim E.D., Onn S., Santos F.* Graphs of transportation polytopes // J. Combinat. Theory. Ser. A. 2009. V. 116. No. 8. P. 1306–1325.
18. *Кравцов М.А., Крачковский А.П.* О некоторых свойствах трехиндексных транспортных многогранников // Дискретная математика. 1999. Т. 11. Вып. 3. С. 109–125.
19. *Гэри М., Джонсон Д.* Вычислительные машины и труднорешаемые задачи. М.: Мир, 1982.
20. *Crama Y., Spieksma F.C.R.* Approximation algorithms for three-dimensional assignment problems with triangle inequalities // Eur J. Oper. Res. 1992. V. 60. P. 273–279.
21. *Финкельштейн Ю.Ю.* Приближенные методы и прикладные задачи дискретного программирования. М.: Наука, 1976.
22. *Spieksma F.C.R.* Multi index assignment problems: complexity, approximation, applications / P.M. Pardalos, L.S. Pitsoulis (Eds.). Nonlinear Assignment Problems: Algorithms and Applications. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 2000. P. 1–11.
23. *Гимади Э.Х., Коркишко Н.М.* Об одном алгоритме решения трехиндексной аксиальной задачи о назначениях на одноциклических подстановках // Дискретный анализ и исследование операций. Сер. 1. 2003. Т. 10. № 2. С. 56–65.
24. *Гимади Э.Х., Глазков Ю.В.* Об асимптотически точном алгоритме решения одной модификации трехиндексной планарной задачи о назначениях // Дискретный анализ и исследование операций. Сер. 2. 2006. Т. 13. № 1. С. 10–26.
25. *Сергеев С.И.* Новые нижние границы для трипланарной задачи назначения. Использование классической модели // АиТ. 2008. № 12. С. 53–75.

    Sergeev, S.I. New Lower Bounds for the Triplanar Assignment Problem. Use of the Classical Model // Autom. Remote Control. 2008. V. 69. No. 12. P. 2039–2060.
26. *Ahuja R.K., Magnati T.L., Orlin J.B.* Network flows: theory, algorithms, and applications. N.J. Prentice Hall, 1993.

27. *Orlin J.B.* A Faster strongly polynomial minimum cost flow algorithm // Oper. Res. 1993. V. 41. No. 2. P. 338–350.

28. *Goldberg A.V., Rao S.* Beyond the flow decomposition barrier // J. ACM. 1998. V. 45. No. 5. P. 783–797.

29. *Литвак Б.Г., Раппопорт А.М.* Задачи линейного программирования, допускающие сетевую постановку // Экономика и мат. методы. 1970. Т. 6. Вып. 4. С. 594–604.

30. *Lin Y.* A recognition problem in converting linear programming to network flow models // Appl. Math. J. Chinese Univer. 1993. V. 8. No. 1. P. 76–85.

31. *Ковалев М.М.* Матроиды в дискретной оптимизации. М.: Едиториал УРСС, 2003.

32. *Gülpinar N., Gutin G., Mitra G., Zverovitch A.* Extracting pure network submatrices in linear programs using signed graphs // Discret. Appl. Math. 2004. V. 137. No. 3. P. 359–372.

33. *Афраймович Л.Г.* Трехиндексные задачи линейного программирования с вложенной структурой // АиТ. 2011. № 8. С. 109–120.

    Afraimovich, L.G. Three-Index Linear Programs with Nested Structure // Autom. Remote Control. 2011. V. 72. No. 8. P. 1679–1689.

34. *Афраймович Л.Г.* Циклическая сводимость многоиндексных систем линейных неравенств транспортного типа // Изв. РАН. Теория и системы управления. 2010. № 4. С. 83–90.

35. *Chen B., Potts C.N., Woeginger G.J.* A review of machine scheduling. Complexity, algorithms and approximability. Handbook of Combinatorial Optimization. Kluwer Acad. Publish. 1998. V. 3. P. 21–169.

36. *Гофман А.Д., Краскал Д.Б.* Целочисленные граничные точки выпуклых многогранников / Линейные неравенства и смежные вопросы. М.: ИЛ, 1959. С. 325–347.

37. *Катеров А.С.* Исследование сводимости трёхиндексных транспортных задач к поиску потока в сети с применением параллельных вычислений / Прикладная информатика и математическое моделирование: Межвуз. сб.научн. тр. М.: МГУП им. Ивана Фёдорова, 2011. С. 47–57.

38. *Прилуцкий М.Х.* Распределение однородного ресурса в иерархических системах древовидной структуры // Тр. междунар. конф. «Идентификация систем и задачи управления SICPRO'2000». Москва, 26–28 сентября 2000 г. М.: ИПУ им. В.А. Трапезникова РАН, 2000. С. 2038–2049.

39. *Borradaile G., Klein P.N., Mozes S., Nussbaum Y., Wulff-Nilsen C.* Multiple-source multiple-sink maximum flow in directed planar graphs in near-linear time // CoRR, volume abs/1105.2228, 2011.

Статья представлена к публикации членом редколлегии А.А. Лазаревым.

Поступила в редакцию 21.09.2011