Автоматика и телемеханика, № 1, 2012

Системный анализ и исследование операций

© 2012 г. **Л.Г. АФРАЙМОВИЧ, канд. физ.-мат. наук**
(Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского)

МНОГОИНДЕКСНЫЕ ТРАНСПОРТНЫЕ ЗАДАЧИ С ДЕКОМПОЗИЦИОННОЙ СТРУКТУРОЙ

Рассматриваются вопросы решения многоиндексных задач линейного и целочисленного линейного программирования транспортного типа. В качестве метода решения предлагается подход, основанный на исследовании сводимости многоиндексных транспортных задач к задаче поиска потока в сети. Для многоиндексных задач с декомпозиционной структурой строится схема сведения, позволяющая определить решение исходной многоиндексной задачи через циклическую декомпозицию потока минимальной стоимости вспомогательной потоковой задачи. На основании разработанного метода предлагается эвристический алгоритм решения NP-трудной целочисленной многоиндексной задачи с системой ограничений, обладающей декомпозиционными свойствами, и матрицей стоимостей общего вида.

1. Введение

Существует широкий класс прикладных задач распределения ресурсов, формализуемых в виде многоиндексных задач (целочисленного) линейного программирования транспортного типа. Примерами таких задач являются (см. [1–5]) задача объемно-календарного планирования, задача распределения мощностей каналов передачи данных, задача формирования портфеля заказов, задачи добычи и транспортировки газа, задача переработки газового конденсата и др. Многоиндексные задачи о назначениях (подкласс многоиндексных транспортных задач целочисленного линейного программирования) возникают, например, в теории расписаний [6, 7], в области компьютерного зрения [8, 9].

Для решения многоиндексных транспортных задач линейного программирования могут быть применены общие методы – симплекс метод, алгоритм Кармаркара [10, 11]. Существует ряд работ, посвященных непосредственно методам решения многоиндексных задач линейного программирования транспортного типа. Наиболее изученным является класс двухиндексных задач [12]. Частные подклассы трех- и четырехиндексных задач рассматриваются, например, в [13–15]. В общей постановке класс многоиндексных задач исследуется в [13]. Условия, при которых удается понизить размерность и (или) сократить количество индексов многоиндексных транспортных задач, обсуждаются в [16]. Геометрические свойства множества допустимых решений многоиндексных транспортных систем линейных неравенств обсуждаются в [14, 17, 18].

Особый интерес представляет решение целочисленных многоиндексных задач линейного программирования транспортного типа. Как известно, матрица ограничений двухиндексной транспортной задачи абсолютно унимодулярна и тем самым класс двухиндексных целочисленных задач линейного программирования разрешим за полиномиальное время [12]. Однако в общей постановке класс целочисленных многоиндексных транспортных задач является NP-трудным уже в трехиндексном случае [19]. Более того для задач данного класса не существует полиномиальных ε-приближенных алгоритмов, иначе P=NP, данный результат также справедлив уже в трехиндексном случае [20]. При отсутствии дополнительных ограничений на параметры для решения многоиндексных целочисленных задач применимы лишь экспоненциальные по оценке вычислительной сложности общие методы целочисленного линейного программирования (например, метод ветвей и границ, метод Гомори [10, 21]). Среди целочисленных многоиндексных транспортных задач наиболее изученным является класс многоиндексных задач о назначениях. Широкий обзор результатов, связанных с анализом вычислительной сложности и построением приближенных алгоритмов решения специальных подклассов многоиндексных задач о назначениях, приведен в [22], дополнительно можно выделить работы [23–25].

Одним из перспективных направлений при разработке эффективных алгоритмов исследования многоиндексных задач линейного программирования является нахождение подклассов задач, для решения которых применимы потоковые методы. Важное влияние на развитие данного направления оказывают активные исследования в области сетевой оптимизации [26]. Существующие эффективные потоковые алгоритмы (см. [27, 28]) позволяют в случае сводимости задач линейного программирования к потоковым задачам построить алгоритмы их решения, обладающие более низкими оценками вычислительной сложности по сравнению с оценками общих методов решения задач линейного программирования. В ряде случаев сведение к потоковой задаче также позволяет предложить алгоритм решения исходной задачи, гарантирующий нахождение целочисленного решения, и тем самым позволяет выделять полиномиально разрешимые подклассы задач среди задач целочисленного линейного программирования. Возможность сводимости задач линейного программирования к потоковым задачам исследовалась в работах [29–32], важным различием которых являются применяемые концепции сводимости. Проблема сводимости многоиндексных транспортных задач линейного программирования является менее исследованной. Известно о сводимости двухиндексных задач к потоковым задачам [12]. Вопрос сводимости многоиндексных задач с произвольным числом индексов рассматривался в [1, 33, 34]

В [1, 33] было показано, что специальные условия 2-вложенности множества подмножеств индексов, по которым происходит суммирование в системе ограничений задачи, являются достаточными (а в случае трехиндексных задач необходимыми и достаточными, иначе $\mathrm{P} = \mathrm{NP}$) для сводимости к задаче поиска потока минимальной стоимости. Особенностью концепции сводимости, применяемой в [1, 33], является существование соответствия между переменными исходной задачи и дугами вспомогательной сети. Предлагаемая схема сведения гарантирует, что произвольный оптимальный поток вспомогательной сети будет определять такое оптимальное решение исходной задачи, в котором переменным присваивается значение потока вдоль соответствующих дуг сети. В случае выполнения условий 2-вложенности решение многоиндексной задачи линейного программирования транспортного типа сводится к поиску потока минимальной стоимости в сети с $O(m+n)$ вершинами и $O(m+n)$ дугами, где n – количество переменных, m – количество неравенств системы ограничений исходной многоиндексной задачи.

При исследовании многоиндексных систем линейных неравенств в [34] была сформулирована концепция сведения системы линейных неравенств к проблеме поиска допустимой циркуляции. Важной особенностью концепции является существование соответствия между переменными исходной системы неравенств и простыми циклами вспомогательной сети. Предлагаемая схема сведения гарантирует, что произвольная допустимая циркуляции вспомогательной сети будет определять такое допустимое решение исходной системы неравенств, в котором переменным присваиваются значения потока вдоль соответствующих простых циклов. Величина потока вдоль простых циклов определяется через циклическую декомпозицию допустимой циркуляции.

Ранее при исследовании многоиндексных задач целочисленного линейного программирования были рассмотрены различного рода декомпозиционные подклассы трехиндексных задач о назначениях. Критерий трехиндексной задачи о назначениях задается как $\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n}\sum\limits_{k=1}^{n} c_{ijk}x_{ijk} \to \min$. В [35] исследован класс трехиндексных аксиальных задач о назначениях с матрицей стоимостей вида $c_{ijk} = a_i b_j d_k$, $i, j, k = \overline{1, n}$, доказана NP-трудность данного класса задач. В [20] исследованы два класса трехиндексных аксиальных задач о назначениях с матрицами стоимостей видов $c_{ijk} = a_{ij} + b_{jk} + d_{ki}$ и $c_{ijk} = \min(a_{ij} + b_{jk}, b_{jk} + d_{ki}, d_{ki} + a_{ij})$, показана их NP-трудность и, более того, доказано отсутствие для данных классов полиномиальных ε-приближенных алгоритмов, иначе P=NP. При выполнении дополнительных условий неравенства треугольника для двух декомпозиционных классов, рассмотренных в работе [20], доказана их NP-трудность и построены полиномиальные ε-приближенные алгоритмы с $\varepsilon = 1/2$ и $\varepsilon = 1/3$, соответственно. Многоиндексные транспортные задачи с декомпозиционной структурой являются менее исследованными. Критерий в многоиндексных транспортных задачах задается как $\sum\limits_{i_1=1}^{n}\sum\limits_{i_2=1}^{n}\ldots\sum\limits_{i_k=1}^{n} c_{i_1 i_2 \ldots i_k} x_{i_1 i_2 \ldots i_k} \to \min$. В [36] исследованы многоиндексные аксиальные задачи о назначениях с матрицей стоимостей, обладающей декомпозиционной структурой вида $c_{i_1 i_2 \ldots i_k} = f(d^{(1)}_{i_1 i_2}, d^{(2)}_{i_2 i_3}, \ldots, d^{(k-1)}_{i_{k-1} i_k})$, построены полиномиальные ε-приближенные алгоритмы, где ε не является константой и зависит от параметров исходной задачи. Оценки для ε уточняются для определенных классов функции f. Результаты обобщаются в [37] при исследовании многоиндексных аксиальных транспортных задач.

Данная работа посвящена продолжению исследований сводимости многоиндексных транспортных задач к потоковым задачам. В разделе 2 приводится формализации многоиндексных задач линейного программирования транспортного типа, вводятся необходимые обозначения. В разделе 3 формулируется вспомогательное понятие циклической декомпозиции циркуляции, применяемое при описании концепции сводимости. Обсуждается алгоритм построения циклической декомпозиции. Раздел 4 посвящен формализации концепции сводимости, которая является обобщением схемы сведения, примененной в [34]. В основу данной схемы положено существование соответствия между переменными исходной задачи и простыми циклами вспомогательной сети. Далее в разделе 5 показано, что специальные условия декомпозиционности множества подмножеств индексов (определяющих ограничения задачи) и условия декомпозиционности многоиндексной матрицы стоимостей (определяющей коэффициенты целевой функции задачи) являются достаточными для сводимости к задаче поиска потока минимальной стоимости. При выполнении найденных в работе условий декомпозиционности решение многоиндексной задачи линейного программирования транспортного типа сводится к поиску потока минимальной стоимости в сети с $O(n)$ вершинами и $O(n)$ дугами, где n – количество переменных исходной многоиндексной задачи. Данный метод решения многоиндексных задач с декомпозиционной структурой также применим при решении целочисленных многоиндексных задач. Примером задачи, обладающей рассматриваемыми декомпозиционными свойствами, является многоиндексная аксиальная задача о назначениях (или многоиндексная аксиальная транспортная задача) с матрицей стоимостей вида $c_{i_i i_2 \ldots i_k} = d^{(1)}_{i_i i_2} + d^{(2)}_{i_2 i_3} + \ldots + d^{(k-1)}_{i_{k-1} i_k}$. На основании построенного метода в разделе 6 предлагается эвристический алгоритм решения NP-трудного класса многоиндексных транспортных задач с системой ограничений, обладающей декомпозиционными свойствами, и матрицей стоимостей общего вида.

2. Многоиндексные транспортные задачи

При постановке многоиндексных задач линейного программирования транспортного типа воспользуемся формализацией, предложенной в [13]. Пусть $s \in N$ и $N(s) = \{1, 2, \ldots, s\}$. Каждому числу l поставим в соответствие параметр j_l, называемый индексом, который принимает значения из множества $J_l = \{1, 2, \ldots, n_l\}$, где $n_l \geqslant 2$, $l \in N(s)$. Пусть $f = \{k_1, k_2, \ldots, k_t\} \subseteq N(s)$. Набор значений индексов $F_f = (j_{k_1}, j_{k_2}, \ldots, j_{k_t})$ будем называть t-индексом, а множество всех t-индексов определим как декартово произведение множеств допустимых значений соответствующих индексов и будем обозначать через $E_f = J_{k_1} \times J_{k_2} \times \ldots \times J_{k_t}$. Пусть $f' \subseteq f'' \subseteq N(s)$, где $f' = \{k'_1, k'_2, \ldots, k'_{t'}\}$, $f'' = \{k''_1, k''_2, \ldots, k''_{t''}\}$, тогда обозначим $F_{f'} = (F_{f''})_{f'}$, если $F_{f'} = (j'_{k'_1}, j'_{k'_2}, \ldots, j'_{k'_{t'}})$, $F_{f''} = (j''_{k''_1}, j''_{k''_2}, \ldots, j''_{k''_{t''}})$ и $j'_{k'_i} = j''_{k'_i}$, $i = \overline{1, t'}$. Если $F_{f'} \in E_{f'}$, $F_{f''} \in E_{f''}$, где $f', f'' \subseteq N(s)$ и $f' \cap f'' = \varnothing$, то через $F_{f'}F_{f''}$ обозначим такой набор, что $F_{f'}F_{f''} \in E_{f' \cup f''}$ и $(F_{f'}F_{f''})_{f'} = F_{f'}$, $(F_{f'}F_{f''})_{f''} = F_{f''}$. Далее определим $\overline{f} = N(s) \backslash f$, тогда согласно введенному обозначению $F_{N(s)} = F_f F_{\overline{f}}$, если $F_f = (F_{N(s)})_f$ и $F_{\overline{f}} = (F_{N(s)})_{\overline{f}}$.

Каждому набору F_f поставим в соответствие действительное число z_{F_f}, $F_f \in E_f$. Данное отображение множества t-индексов E_f в множество действительных чисел назовем (как и в [13]) t-индексной матрицей и обозначим через $\{z_{F_f}\}$. Рассмотрим s-индексную матрицу $\{z_{N(s)}\}$ и примем следующее обозначение:

$$\sum_{F_f \in E_f} z_{F_f F_{\overline{f}}} = \sum_{j_{k_1} \in J_{k_1}} \sum_{j_{k_2} \in J_{k_2}} \cdots \sum_{j_{k_t} \in J_{k_t}} z_{F_f\, F_{\overline{f}}}, \quad F_{\overline{f}} \in E_{\overline{f}}.$$

Введенное обозначение подсумм s-индексной матрицы будем использовать при формализации многоиндексных транспортных задач.

Пусть M – заданное множество, $M \subseteq 2^{N(s)}$; $\{a_{F_{\overline{f}}}\}$, $\{b_{F_{\overline{f}}}\}$ – заданные $|\overline{f}|$-индексные матрицы свободных коэффициентов, $0 \leqslant a_{F_{\overline{f}}} \leqslant b_{F_{\overline{f}}}$, $F_{\overline{f}} \in E_{\overline{f}}$, $f \in M$; $\{c_{F_{N(s)}}\}$ – заданная s-индексная матрица коэффициентов целевой функции; $\{x_{F_{N(s)}}\}$ – s-индексная матрица неизвестных. Тогда многоиндексная задача линейного программирования транспортного типа формализуется следующим образом:

$$a_{F_{\overline{f}}} \leqslant \sum_{F_f \in E_f} x_{F_f F_{\overline{f}}} \leqslant b_{F_{\overline{f}}}, \quad F_{\overline{f}} \in E_{\overline{f}}, \quad f \in M; \tag{1}$$

$$x_{F_{N(s)}} \geqslant 0, \quad F_{N(s)} \in E_{N(s)}; \tag{2}$$

$$\sum_{F_{N(s)} \in E_{N(s)}} c_{F_{N(s)}} x_{F_{N(s)}} \to \min. \tag{3}$$

Задачу (1)–(3) будем обозначать $w(s; M; n_1, n_2, \ldots, n_s; \{a_{F_{\overline{f}}}\}, \{b_{F_{\overline{f}}}\}, f \in M; \{c_{F_{N(s)}}\})$, а класс всех многоиндексных задач вида (1)–(3) при фиксированном множестве M будем обозначать $W(M)$. Если $w \in W(M)$, то ограничение вида (1) задачи w, соответствующее фиксированному множеству $f \in M$ и фиксированному набору $F_{\overline{f}} \in E_{\overline{f}}$, обозначим $d(w, f, F_{\overline{f}})$.

3. Циклическая декомпозиция потока

В качестве потоковой задачи рассмотрим задачу поиска циркуляции минимальной стоимости в сети с двусторонними пропускными способностями. Известно, что допустимая циркуляция может быть найдена при помощи алгоритма поиска максимального потока в соответствующей канонической сети; циркуляция минимальной стоимости – при помощи алгоритма поиска потока минимальной стоимости заданной величины [26]. Важно отметить, что матрица системы ограничений проблемы поиска циркуляции является абсолютно унимодулярной [10]. Таким образом, в совместной сети с целочисленными пропускными способностями всегда существует целочисленная допустимая циркуляция. Циркуляция может быть декомпозирована на потоки вдоль простых циклов сети. Целочисленная циркуляция – на целочисленные потоки вдоль циклов. Эти результаты будут использоваться далее при исследовании сводимости многоиндексных транспортных задач к потоковым задачам.

Рассмотрим постановку задачи поиска потока (циркуляции) минимальной стоимости [26]. Пусть $G = (V_G, A_G)$ – ориентированный граф без петель, здесь V_G и A_G – множество номеров вершин и множество дуг графа G соответственно, $A_G \subseteq V_G^2$. Когда это не вызывает неоднозначности, будем опускать нижний индекс G при обозначении множества вершин и дуг графа. Обозначим через l_{ij} и u_{ij} нижнюю и верхнюю пропускные способности дуги (i, j) соответственно, $0 \leqslant l_{ij} \leqslant u_{ij}$; e_{ij} – стоимость дуги (i, j); x_{ij} – величина потока, проходящего через дугу (i, j), $(i, j) \in A$. Необходимо найти неизвестные величины x_{ij}, $(i, j) \in A$, являющиеся решением следующей задачи линейного программирования:

$$\sum_{(j,i)\in A} x_{ji} - \sum_{(i,j)\in A} x_{ij} = 0, \quad i \in V; \tag{4}$$

$$l_{ij} \leqslant x_{ij} \leqslant u_{ij}, \quad (i, j) \in A; \tag{5}$$

$$\sum_{(i,j)\in A} e_{ij} x_{ij} \to \min. \tag{6}$$

Задачу (4)–(6) будем обозначать далее через $v(G; l_{ij}, u_{ij}, e_{ij}, (i, j) \in A)$. Циркуляцией будем называть набор неотрицательных значений x_{ij}, $(i, j) \in A$, удовлетворяющих системе ограничений (4). Если дополнительно $x_{ij} \in Z$, $(i, j) \in A$, то циркуляцию будем называть целочисленной. Допустимой циркуляцией будем называть набор значений x_{ij}, $(i, j) \in A$, удовлетворяющих системе ограничений (4), (5). Циркуляцией минимальной стоимости будем называть набор значений x_{ij}, $(i, j) \in A$, являющийся решением задачи (4)–(6).

Далее для удобства простой цикл графа G будем обозначать как $C = (i_1, i_2, \ldots$ $\ldots, i_{k+1})$, где $(i_j, i_{j+1}) \in A$, $j = \overline{1, k}$; $i_1 = i_{k+1}$; $i_{j'} \neq i_{j''}$ при $j' \neq j''$, $j', j'' = \overline{1, k}$. Для определенности будем также предполагать, что $i_1 < i_j$, $j = \overline{2, k}$. Пусть $(u, v) \in A$, $C = (i_1, i_2, \ldots, i_{k+1})$, тогда запись $(u, v) \in C$ будет обозначать то, что существует $j \in \{1, 2, \ldots, k\}$, что $u = i_j$, $v = i_{j+1}$; $(u, v) \notin C$ будет обозначать обратное. Легко увидеть, что число простых циклов в графе ограничено сверху, например, величиной $\sum\limits_{i=1}^{|V|} C_{|V|}^i (i-1)!$ и, таким образом, множество простых циклов в графе является конченым. Множество всех простых циклов графа G будем обозначать через $C(G)$.

Определение 1. Пусть x_{ij}, $(i, j) \in A$ – циркуляция графа G. Циклической декомпозицией циркуляции будем называть такой набор неотрицательных значений y_C, $C \in C(G)$, что $\sum\limits_{C \in C(G) | (i,j) \in C} y_C = x_{ij}$, $(i, j) \in A$. Если дополнительно $y_C \in Z$, $C \in C(G)$, то циклическую декомпозицию будем называть целочисленной.

Известны следующие результаты.

Утверждение 1 [34]. *Для произвольной циркуляции существует ее циклическая декомпозиция. Для произвольной целочисленной циркуляции существует ее целочисленная циклическая декомпозиция.*

Утверждение 2 [34]. *Существует алгоритм построения циклической декомпозиции по заданной циркуляции, требующий $O(|V||A|)$ вычислительных операций.*

Стоит отметить, что алгоритм построения циклической декомпозиции, предложенный в [34], гарантирует построение целочисленной циклической декомпозиции по заданной целочисленной циркуляции.

4. Концепция сводимости

Приведем формализацию концепции сводимости, которую далее будем использовать при исследовании сводимости многоиндексных задач к потоковым задачам. Пусть $A \in R^{n\times m}$, b, b^-, $b^+ \in R^n$, $c \in R^m$ – заданные параметры, $x \in R^m$ – вектор неизвестных. Через $w(A, b, c)$ будем обозначать задачу линейного программирования $\min\{(c, x)|Ax \leqslant b, x \geqslant 0\}$; через $w(A, b^-, b^+, c)$ – задачу линейного программирования $\min\{(c, x)|b^- \leqslant Ax \leqslant b^+, x \geqslant 0\}$. Для удобства через $row(A)$ и $col(A)$ будем обозначать количество строк и столбцов матрицы A соответственно. Отметим, что задача $w(A, b^-, b^+, c)$ может быть описана с использованием обозначения вида $w(A, b, c)$. Тем не менее будем использовать обозначение $w(A, b^-, b^+, c)$ в случае, когда хотим подчеркнуть, что система ограничений задачи представляет собой систему двусторонних неравенств. Будем также рассматривать задачи целочисленного линейного программирования. Если $w = w(A, b, c)$ – задача линейного программирования, то через w_Z обозначим задачу целочисленного линейного программирования $w_Z = \min\{(c, x)|Ax \leqslant b, x \in {Z_+}^{col(A)}\}$. Пусть W – произвольный класс задач линейного программирования. Соответствующий класс задач целочисленного линейного программирования определим как $W_Z = \{w_Z|w \in W\}$.

Далее рассмотрим два класса задач линейного программирования W' и W''. На содержательном уровне под сводимостью класса W' к классу W'' понимается возможность построения для произвольной задачи $w' \in W'$ соответствующей задачи $w'' \in W''$ таким образом, чтобы решение задачи w'' определяло решение задачи w'. При формализации конкретной схемы сведéния будем определять временные затраты и (или) конкретные вычислительные процедуры, связанные с:

— построением матрицы системы ограничений задачи w'' по исходным параметрам задачи w';
— построением свободных коэффициентов и коэффициентов целевой функции задачи w'' по исходным параметрам задачи w';
— построением решения задачи w' по решению задачи w''.

Предлагаемое далее обозначение схемы сведения вводится по аналогии с нотацией Р. Грэхема (R. Graham), используемой при классификации задач теории расписаний [38].

Определение 2. Будем говорить, что класс W' является $t_1 - s_1|t_2 - s_2|t_3 - s_3$ сводимым к классу W'', если для любой задачи $w' = w(A', b', c') \in W'$ можно за время $O(t_1)$ построить матрицу A'', за время $O(t_2)$ построить векторы b'', c'', такие что $w'' = w(A'', b'', c'') \in W''$, и при этом

— *задача w' совместна (ограничена) тогда и только тогда, когда совместна (ограничена) задача w'';*
— *если известно оптимальное (допустимое) решение x'' задачи w'', то оптимальное (допустимое) решение x' задачи w' может быть построено за время $O(t_3)$.*

Здесь $(-s_1)$, $(-s_2)$, $(-s_3)$ – опциональные строковые обозначения вычислительных процедур, связанных с построением матрицы системы ограничений, свободных коэффициентов и коэффициентов целевой функции и с построением решения задачи соответственно.

Задачу w'' (см. определение 2) будем называть задачей, соответствующей задаче w'. Иногда для удобства функции оценки вычислительной сложности t_1, t_2, t_3 будем заменять на обозначения L или P, подразумевая линейные или полиномиальные в зависимости от размера индивидуальной задачи w' функции соответственно.

В данной работе исследуется возможность сведения подклассов многоиндексных задач линейного программирования транспортного типа к классу задач поиска циркуляции минимальной стоимости. При этом будем рассматривать такие схемы сведения, когда решение исходной многоиндексной задачи определяется через циклическую декомпозицию потока минимальной стоимости соответствующей потоковой задачи. Класс потоковых задач определим следующим образом. Обозначим через $Graph$ – множество всех ориентированных графов без петель. Класс задач поиска потока минимальной стоимости задается как $W_{Graph} = \{v(G, l_{ij}, u_{ij}, e_{ij}, (i,j) \in A_G) | l_{ij}, u_{ij} \in R_+, e_{ij} \in R, (i,j) \in A_G, G \in Graph\}$.

Определение 3. *Пусть W – класс задач линейного программирования с двусторонней системой неравенств. Будем говорить, что класс W является $t_1|t_2 - equal|t_3 - cycle$ сводимым к классу W_{Graph}, если класс W является $t_1|t_2|t_3$ сводимым к классу W_{Graph}; и если $v = v(G; l_{ij}, u_{ij}, e_{ij}, (i,j) \in A_G) \in W_{Graph}$ является задачей, соответствующей задаче $w = w(A, b^-, b^+, c) \in W$, то существуют такие инъективные функции $\alpha : \{1, 2, \ldots, row(A)\} \to A_G, \beta : \{1, 2, \ldots, col(A)\} \to C(G)$, что выполняются следующие условия:*

– *$l_{\alpha(i)} = b_i^-$, $u_{\alpha(i)} = b_i^+$, $i = \overline{1, row(A)}$; $l_{(u,v)} = 0, u_{uv} = b^*$, $(u,v) \in A_G \backslash \{\alpha(i) | i = \overline{1, row(A)}\}$, где b^* – некоторая достаточно большая величина, для определенности $b^* = \sum\limits_{i=1}^{row(A)} b_i^+$;*

– *если циркуляция z_{ij}, $(i,j) \in A_G$, является оптимальным (допустимым) решением задачи v и y_C, $C \in C(G)$, является циклической декомпозицией данной циркуляции, то $x = (y_{\beta(1)}, y_{\beta(2)}, \ldots, y_{\beta(col(A))})$ будет являться оптимальным (допустимым) решением задачи w.*

Таким образом, согласно определению 3 в случае $t_1|t_2 - equal|t_3 - cycle$ сводимости класса W к классу W_{Graph} гарантируется, что если $w \in W$, $v = v(G; l_{ij}, u_{ij}, c_{ij}, (i,j) \in A_G) \in W_{Graph}$ и v является задачей, соответствующей задаче w, то при построении задачи поиска потока минимальной стоимости v пропускные способности и стоимости дуг в задаче определяются через коэффициенты задачи w, а решение задачи w находится через циклическую декомпозицию решения задачи v. Тогда можно предложить алгоритм решения задачи w, основанный на решении соответствующей задачи v и имеющий вычислительную сложность $O(t_1 + t_2 + t_3 + \mu(|V_G|, |A_G|))$, где $\mu(n, m)$ – вычислительная сложность алгоритма решения задачи поиска потока минимальной стоимости в сети с n вершинами и m дугами. Обзор оценок вычислительной сложности для известных потоковых алгоритмов можно найти, например, в [27, 28].

Теорема 1. *Пусть класс задач W является $P|P - equal|P - cycle$ сводимым к классу W_{Graph}, тогда класс задач целочисленного линейного программирования W_Z разрешим за полиномиальное время.*

Доказательства теоремы 1 и последующих лемм 1 и 2 и теорем 2 и 3 приведены в Приложении.

Согласно теореме 1 выделение подклассов многоиндексных задач, сводимых к потоковым задачам, позволяет также выделить в NP-трудном классе целочисленных многоиндексных задач полиномиально разрешимые подклассы.

5. Условия сводимости многоиндексных задач

Далее будем рассматривать вопросы построения подклассов многоиндексных задач, которые могут быть сведены согласно концепции, введенной в определении 3, к потоковым задачам. Оказывается, что одним из таких подклассов является класс многоиндексных транспортных задач со специальной декомпозиционной структурой.

Определение 4. *Пусть* $M \subseteq 2^{N(s)}$ *и* $f_1, f_2, \ldots, f_k$ *– разбиение множества* $N(s)$*. Будем говорить, что* M *является* $f_1, f_2, \ldots, f_k$*-декомпозиционным, если* $M \subseteq \subseteq \{f_i | i = \overline{1,k}\} \cup \{f_i \cup f_{i+1} | i = \overline{1, k-1}\}$.

Определение 5. *Пусть* $\{c_{F_{N(s)}}\}$ *–* s*-индексная матрица и* $f_1, f_2, \ldots, f_k$ *– разбиение множества* $N(s)$*. Будем говорить, что многоиндексная матрица* $\{c_{F_{N(s)}}\}$ *является* $f_1, f_2, \ldots, f_k$*-декомпозиционной, если найдутся такие многоиндексные матрицы* $\{d_{F_{f_i}}\}$ $f \in B$*, что* $c_{F_{N(s)}} = \sum\limits_{f \in B} d_{(F_{N(s)})_f}$*, где* $B = \{f_i | i = \overline{1,\, k}\} \cup \cup \{f_i \cup f_{i+1} | i = \overline{1,\, k-1}\}$.

Определение 6. *Пусть* $f_1, f_2, \ldots, f_k$ *– разбиение множества* $N(s)$*, тогда через* $W^D(f_1, f_2, \ldots, f_k)$ *обозначим следующий класс многоиндексных транспортных задач с декомпозиционной структурой:*

$$W^D(f_1, f_2, \ldots, f_k) = \{w(s; M; n_1, n_2, \ldots, n_s; \{a_{F_{\overline{f}}}\}, \{b_{F_{\overline{f}}}\}, f \in M; \{c_{F_{N(s)}}\}) | \; M \text{ и } \{c_{F_{N(s)}}\} \text{ являются } f_1, f_2, \ldots, f_k\text{-декомпозиционными}\}.$$

Лемма 1. *Пусть* $f_1, f_2, \ldots, f_k$ *– разбиение множества* $N(s)$*, тогда*

$$\sum_{i=1}^{k} |E_{f_i}| \leqslant |E_{N(s)}|.$$

Лемма 2. *Пусть* $f_1, f_2, \ldots, f_k$ *– разбиение множества* $N(s)$*, тогда*

$$\sum_{i=1}^{k-1} |E_{f_i}||E_{f_{i+1}}| \leqslant |E_{N(s)}|.$$

Теорема 2. *Пусть* $f_1, f_2, \ldots, f_k$ *– разбиение множества* $N(s)$*, тогда класс задач* $W^D(f_1, f_2, \ldots, f_k)$ *является* $L|L - equal||E_{N(s)}|^2 - cycle$ *сводимым к классу* W_{Graph}.

Конструктивная схема доказательства теоремы 2 позволяет предложить алгоритм решения задач класса $W^D(f_1, f_2, \ldots, f_k)$, основанный на построении соответствующей потоковой задачи, поиске потока минимальной стоимости и на построении решения исходной многоиндексной задачи через циклическую декомпозицию найденного потока. Для поиска потока минимальной стоимости можно воспользоваться известными потоковыми алгоритмами [27, 28]. Отсюда сформулируем следствие.

Следствие 1. *Пусть* $f_1, f_2, \ldots, f_k$ *– разбиение множества* $N(s)$*. Тогда существует алгоритм решения задач класса* $W^D(f_1, f_2, \ldots, f_k)$*, требующий* $O(|E_{N(s)}|^3 \log^2 |E_{N(s)}|)$ *вычислительных операций.*

Из теорем 1, 2 и следствия 1 непосредственно вытекает следующий результат.

Следствие 2. Пусть $f_1, f_2, \ldots, f_k$ – разбиение множества $N(s)$, тогда класс задач целочисленного линейного программирования $W_Z^D(f_1, f_2, \ldots, f_k)$ разрешим за полиномиальное время.

Приведем пример многоиндексной транспортной задачи с декомпозиционной структурой, для решения которой применим предлагаемый в работе подход. Пусть $s = 3$, рассмотрим многоиндексную задачу линейного программирования транспортного типа:

$$a_{j_3}^- \leqslant \sum_{j_1 \in J_1} \sum_{j_2 \in J_2} x_{j_1 j_2 j_3} \leqslant a_{j_3}^+, \quad j_3 \in J_3;$$

$$b_{j_2}^- \leqslant \sum_{j_1 \in J_1} \sum_{j_3 \in J_3} x_{j_1 j_2 j_3} \leqslant b_{j_2}^+, \quad j_2 \in J_2;$$

$$c_{j_1}^- \leqslant \sum_{j_2 \in J_2} \sum_{j_3 \in J_3} x_{j_1 j_2 j_3} \leqslant c_{j_1}^+, \quad j_1 \in J_1;$$

$$d_{j_1 j_2}^- \leqslant \sum_{j_3 \in J_3} x_{j_1 j_2 j_3} \leqslant d_{j_1 j_2}^+, \quad j_3 \in J_3;$$

$$x_{j_1 j_2 j_3} \geqslant 0, \quad j_1 \in J_1, \quad j_2 \in J_2, \quad j_3 \in J_3;$$

$$\sum_{j_1 \in J_1} \sum_{j_2 \in J_2} \sum_{j_3 \in J_3} (u_{j_2 j_3} + v_{j_2} + w_{j_3}) x_{j_1 j_2 j_3} \to \min.$$

Данная многоиндексная задача включена в класс $W(M)$, где $M = \{\{1,2\},\{1,3\},\{2,3\},\{3\}\}$. Выберем разбиение $f_1 = \{1\}$, $f_2 = \{2\}$, $f_3 = \{3\}$ множества $N(3)$. Несложно увидеть, что

$$M \subseteq \{\overline{f_i} | \, i = \overline{1,3}\} \cup \{\overline{f_i \cup f_{i+1}} | \, i = \overline{1,2}\} = \{\{1,2\},\{1,3\},\{2,3\},\{1\},\{3\}\}.$$

И таким образом, множество M, согласно определению 4, является f_1, f_2, f_3-декомпозиционным. Далее заметим, что

$$\{\{2,3\},\{2\},\{3\}\} \subseteq B = \{f_i | \, i = \overline{1,3}\} \cup \{f_i \cup f_{i+1} | \, i = \overline{1,2}\} = \\ = \{\{1\},\{2\},\{3\},\{1,2\},\{2,3\}\}.$$

Отсюда многоиндексная матрица стоимостей задачи (определяется выражением $u_{j_2 j_3} + v_{j_2} + w_{j_3}$), согласно определению 5, является f_1, f_2, f_3-декомпозиционной. Следовательно, по определению 6 рассматриваемая многоиндексная задача относится к классу $W^D(f_1, f_2, f_3)$, $L|L - equal||E_{N(s)}|^2 - cycle$ сводимому к классу W_{Graph}, здесь $|E_{N(s)}| = |J_1||J_2||J_3|$.

Далее рассмотрим пример схемы сведения, используемой при конструктивном доказательстве теоремы 2 (см. Приложение). Пусть $|J_1| = |J_2| = |J_3| = 2$. Приведем транспортную сеть, определяющую задачу поиска потока минимальной стоимости, соответствующую исходной многоиндексной задаче.

На рисунке для ряда дуг приведены их пропускные способности и стоимости. Дуги, у которых не указаны сегменты пропускных способностей, имеют нулевую нижнюю и неограниченную верхнюю пропускные способности. Дуги, у которых не указаны стоимости, имеют нулевую стоимость. Согласно доказательству теоремы 2 переменной $x_{i_1 i_2 i_3}$ ставится в соответствие простой цикл

$$(s, v'_{j_1}\{1\}, v''_{j_1}\{1\}, v'_{j_2}\{2\}, v''_{j_2}\{2\}, v'_{j_3}\{3\}, v''_{j_3}\{3\}, t, s), \quad j_1 \in J_1, \quad j_2 \in J_2, \quad j_3 \in J_3.$$

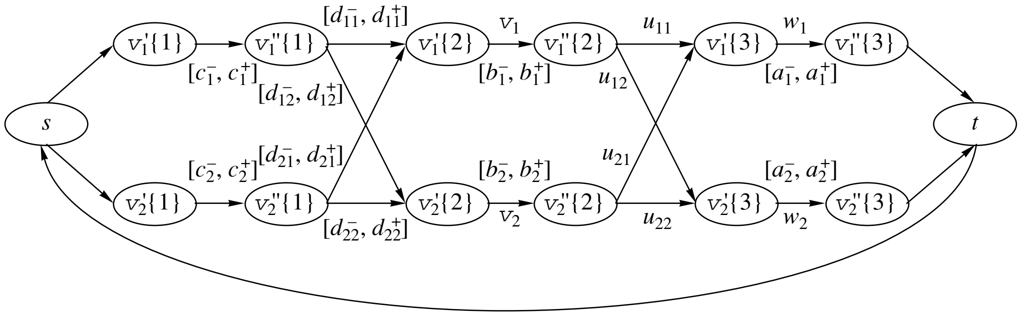

Рисунок.

В силу $L|L-equal||E_{N(s)}|^2-cycle$ сводимости класса $W^D(f_1, f_2, f_3)$ к классу W_{Graph} решение исходной многоиндексной задачи определяется следующим образом: каждой переменной многоиндексной задачи присваивается значение потока вдоль соответствующего простого цикла, которое, в свою очередь, получается в результате циклической декомпозиции потока минимальной стоимости данной сети.

6. Приближенное решение целочисленных многоиндексных задач

Класс многоиндексных задач целочисленного линейного программирования является NP-трудными [19]. Также известно, что в общем случае для многоиндексных задач целочисленного линейного программирования не существует полиномиальных приближенных алгоритмов, иначе $P = NP$ [20]. Более того, можно показать отсутствие эффективных приближенных алгоритмов даже в классе целочисленных многоиндексных задач с системой ограничений, обладающей декомпозиционными свойствами, и с матрицей стоимостей общего вида.

Сформулируем используемое определение ε-приближенного алгоритма, приведенное в [19]. Пусть W – класс задач минимизации; H – алгоритм, который для любой задачи $w \in W$ возвращает допустимое решение $H(w)$ задачи w; $c(H(w))$ – значение критерия задачи w на допустимом решении $H(w)$; $OPT(w)$ – оптимальное значение критерия задачи w. Тогда алгоритм H будем называть ε-приближенным алгоритмом для задач класса W, где ε – неотрицательная константа, если выполняется следующее условие: $c(H(w)) \leqslant (1+\varepsilon)OPT(w)$, $w \in W$.

Теорема 3. *Пусть $f_1, f_2, \ldots, f_k$ – разбиение множества $N(s)$ и $k \geqslant 3$. Тогда существует $f_1, f_2, \ldots, f_k$-декомпозиционное множество M такое, что для задач класса $W_Z(M)$ не существует полиномиального ε-приближенного алгоритма для любых $\varepsilon \geqslant 0$, иначе $P = NP$.*

Для поиска приближенного решения NP-трудных задач с системой ограничений, обладающей декомпозиционными свойствами, и с матрицей стоимостей общего вида предлагается следующий подход. Будем искать многоиндексную матрицу стоимостей, обладающую требуемыми декомпозиционными свойствами и являющуюся наиболее "близкой" к матрице стоимостей исходной задачи. Далее находим решение вспомогательной задачи с исходной системой ограничений и новой матрицей стоимостей. Для поиска решения вспомогательной задачи можно воспользоваться полиномиальным алгоритмом решения задач класса $W_Z^D(f_1, f_2, \ldots, f_k)$ (см. следствия 1 и 2). Найденное решение будет являться допустимым решением исходной многоиндексной задачи целочисленного линейного программирования. Подставив найденное решение вспомогательной задачи в критерий исходной задачи, получим достижимую оценку, которая может быть использована, например, при решении NP-трудных многоиндексных задач методом ветвей и границ [11].

Рассмотрим предложенный подход на примере известной NP-трудной аксиальной трехиндексной задачи о назначениях [19]. Данная задача ставится как следующая задача булева программирования:

$$\sum_{j_1=1}^{n}\sum_{j_2=1}^{n} x_{j_1j_2j_3} = 1, \quad j_3 = \overline{1,n}; \tag{7}$$

$$\sum_{j_1=1}^{n}\sum_{j_3=1}^{n} x_{j_1j_2j_3} = 1, \quad j_2 = \overline{1,n}; \tag{8}$$

$$\sum_{j_2=1}^{n}\sum_{j_3=1}^{n} x_{j_1j_2j_3} = 1, \quad j_1 = \overline{1,n}; \tag{9}$$

$$x_{j_1j_2j_3} \in \{0,\ 1\}, \quad j_1, j_2, j_3 = \overline{1,n}; \tag{10}$$

$$\sum_{j_1=1}^{n}\sum_{j_2=1}^{n}\sum_{j_3=1}^{n} c_{j_1j_2j_3} x_{j_1j_2j_3} \to \min. \tag{11}$$

Заменим условие (10) на

$$x_{j_1j_2j_3} \in Z_+, \quad j_1, j_2, j_3 = \overline{1,n}. \tag{12}$$

Несложно увидеть, что задачи (7)–(11) и (7)–(9), (12), (11) эквивалентны. Пусть далее $s = 3$ и $M = \{\{1,\ 2\},\ \{2,\ 3\},\ \{1,\ 3\}\}$. Задача (7)–(9), (12), (11) относится к классу $W_Z(M)$. Отметим, что $N(3) = \{1,\ 2,\ 3\}$ и $\{1\}, \{2\}, \{3\}$ – разбиение множества $N(3)$. Согласно определению 4 множество M является $\{1\}, \{2\}, \{3\}$-декомпозиционным. Однако из теоремы 1 и NP-трудности класса $W_Z(M)$ следует, что класс задач $W(M)$ не является $P|P - equal|P - cycle$ сводимым к классу W_{Graph}. Более того, для класса $W_Z(M)$ не существует полиномиального ε-приближенного алгоритма для любых $\varepsilon \geqslant 0$, иначе $P = NP$ [20]. С другой стороны, среди задач класса $W(M)$ есть задачи, многоиндексная матрица стоимостей целевой функции которых обладает декомпозиционными свойствами. Так, рассмотрим трехиндексную матрицу: $e_{j_1j_2j_3} = u_{j_1j_2} + v_{j_2j_3}$, $j_1, j_2, j_3 = \overline{1,n}$, здесь $\{u_{j_1j_2}\}$ и $\{v_{j_2j_3}\}$ – двухиндексные матрицы. Согласно определению 5 трехиндексная матрица $\{e_{j_1j_2j_3}\}$ является $\{1\}, \{2\}, \{3\}$-декомпозиционной. Рассмотрим критерий

$$\sum_{j_1=1}^{n}\sum_{j_2=1}^{n}\sum_{j_3=1}^{n} (u_{j_1j_2} + v_{j_2j_3}) x_{j_1j_2j_3} \to \min. \tag{13}$$

Подкласс задач $W(M)$, в которых целевая функция представима в виде (13), включен в класс $W^D(\{1\}, \{2\}, \{3\})$ и, согласно теореме 2, является $L|L - equal||E_{N(s)}|^2 - cycle$ сводимым к классу W_{Graph}. Отсюда согласно следствию 2 задача (7)–(9), (12), (13) разрешима за полиномиальное время. Отметим, что здесь $|E_{N(s)}| = n^3$.

В общем случае при решении задач (7)–(9), (12), (11) будем искать $\{1\}, \{2\}, \{3\}$-декомпозиционную матрицу вида $\{e_{j_1j_2j_3}\}$, наиболее "близкую" к исходной матрице общего вида $\{c_{j_1j_2j_3}\}$. Рассмотрим следующую задачу поиска ближайшей декомпозиционной матрицы стоимостей:

$$e_{j_1j_2j_3} = u_{j_1j_2} + v_{j_2j_3}, \quad j_1, j_2, j_3 = \overline{1,n}; \tag{14}$$

$$\operatorname{dist}(\{c_{j_1j_2j_3}\}, \{e_{j_1j_2j_3}\}) \to \min, \tag{15}$$

где $e_{j_1j_2j_3},\ u_{j_1j_2},\ v_{j_2j_3},\ j_1, j_2, j_3 = \overline{1,\ n}$, – действительные неизвестные, dist – некоторая мера близости многоиндексных матриц. Рассмотрим в качестве функции dist функцию квадрата евклидового расстояния. Тогда задача (14)–(15) превращается в задачу квадратичной безусловной оптимизации

$$(16)\qquad \sum_{j_1=1}^{n}\sum_{j_2=1}^{n}\sum_{j_3=1}^{n}(c_{j_1j_2j_3}-u_{j_1j_2}-v_{j_2j_3})^2 \to \min .$$

Для решения задачи (16) можно применить методы минимизации суммы квадратов невязок [39]. Пусть $u^*_{j_1j_2},\ v^*_{j_2j_3},\ j_1,j_2,j_3=\overline{1,\ n}$, – решение задачи (16). Тогда вместо исходной задачи (7)–(9), (12), (11) будем решать задачу с той же системой ограничений и с критерием $\sum\limits_{j_1=1}^{n}\sum\limits_{j_2=1}^{n}\sum\limits_{j_3=1}^{n}(u^*_{j_1j_2}+v^*_{j_2j_3})x_{j_1j_2j_3}\to\min$. Решение построенной задачи, согласно следствию 2, может быть найдено за полиномиальное время в силу ее принадлежности к классу $W_Z^D(\{1\},\{2\},\{3\})$. Как уже отмечалось, найденное решение является допустимым решением исходной NP-трудной задачи о назначениях и может быть использовано, например, для отыскания достижимой оценки при решении методом ветвей и границ.

7. Заключение

Работа посвящена исследованию $t_1|t_2-equal|t_3-cycle$ сводимости многоиндексных транспортных задач к классу задач поиска потока минимальной стоимости. Рассматриваемая концепция сведения позволяет ввести соответствие между переменными исходной задачи и простыми циклами вспомогательной сети. При этом поток минимальной стоимости вспомогательной сети определяет такое оптимальное решение исходной задачи, в котором переменным присваивается значение потока вдоль соответствующих простых циклов. Величина потока вдоль простых циклов определяется через циклическую декомпозицию потока.

Выделен класс многоиндексных транспортных задач с декомпозиционной структурой, для которых доказана их $L|L-equal||E_{N(s)}|^2-cycle$ сводимость к классу задач поиска потока минимальной стоимости. На основании сводимости построен полиномиальный алгоритм решения многоиндексных транспортных задач с декомпозиционной структурой. Алгоритм требует $O(|E_{N(s)}|^3\log^2|E_{N(s)}|)$ вычислительных операций, где величина $|E_{N(s)}|$ равна количеству переменных многоиндексной задачи. Построенный алгоритм также применим для поиска целочисленного решения.

Полиномильная разрешимость целочисленных многоиндексных транспортных задач с декомпозиционной структурой представляет особый интерес по следующим основным причинам. Формализация найденного класса задач с декомпозиционной структурой связана с некоторыми декомпозиционными свойствами системы ограничений задачи и многоиндексной матрицы стоимостей критерия задачи. Оказывается, что для класса целочисленных многоиндексных транспортных задач с системой ограничений, обладающей декомпозиционными свойствами, и с матрицей стоимостей общего вида не существует полиномиальных ε-приближенных алгоритмов для любых $\varepsilon\geqslant 0$, иначе $P=NP$. Отсюда выделенный класс многоиндексных матриц стоимостей, обладающих декопозиционными свойствами, позволяет для систем ограничений рассматриваемых NP-трудных задач целочисленного линейного программирования определить класс критериев, при которых задача становится полиномиально разрешимой. На основании построенного полиномиального алгоритма решения многоиндексных транспортных задач с декомпозиционной структурой предлагается эвристический алгоритм решения NP-трудных, сложно аппроксимируемых целочисленных многоиндексных задач с системой ограничений, обладающей декомпозиционными свойствами. Эвристический алгоритм основан на поиске матрицы с декомпозиционными свойствами, наиболее “близкой” к исходной матрице стоимостей.

Дальнейшее направление исследований связанно с поиском необходимых и достаточных условий $t_1|t_2 - equal|t_3 - cycle$ сводимости для многоиндексных транспортных задач; с разработкой новых концепций сводимости, позволяющих расширять область применения потоковых алгоритмов при решении многоиндексных задач. Особый интерес представляет построение оценок отклонения от оптимума предложенного эвристического алгоритма.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Доказательство теоремы 1. Пусть класс W является $P|P - equal|P - - cycle$ сводимым к классу W_{Graph}. Согласно определению 3 для произвольной задачи $w \in W$ существует соответствующая ей задача $v \in W_{Graph}$. При этом соответствующая задача v может быть построена за полиномиальное, зависящее от размера задачи w, время, и, таким образом, размер задачи v также полиномиально зависит от размера исходной задачи w. Как известно, целочисленное решение потоковой задачи v может быть найдено, например, при помощи полиномиальных методов решения потоковых задач [26]. Согласно утверждениям 1 и 2, целочисленная циклическая декомпозиция целочисленного решения задачи v может быть построена за полиномиальное время. По определению 3 через построенную целочисленную циклическую декомпозицию можно найти за полиномиальное время целочисленное решение задачи w. Тогда найденное за полиномиальное время целочисленное решение задачи w будет также являться решением задачи w_Z. Отсюда класс задач W_Z разрешим за полиномиальное время. Теорема 1 доказана.

Доказательство леммы 1. Пусть $f_1, f_2, \ldots, f_k$ – разбиение множества $N(s)$. Тогда $|E_{f_i}| = \prod\limits_{j \in f_i} n_j$, $i = \overline{1,k}$, и $|E_{N(s)}| = \prod\limits_{l=1}^{s} n_l = \prod\limits_{i=1}^{k} \prod\limits_{j \in f_i} n_j = \prod\limits_{i=1}^{k} |E_{f_i}|$. Обозначим для удобства $|E_{f_i}| = m_i$, $i = \overline{1,k}$, тогда $|E_{N(s)}| = \prod\limits_{i=1}^{k} m_i$. Так как $n_l \geqslant 2$, $l = \overline{1,s}$, то $m_i \geqslant 2$, $i = \overline{1,\ k}$.

Несложно увидеть, что $k \leqslant 2^{k-1} \leqslant \frac{\prod_{i=1}^{k} m_k}{\max\limits_{i=\overline{1,k}} m_i}$. Далее, $\sum\limits_{i=1}^{k} m_i \leqslant k \max\limits_{i=\overline{1,k}} m_i \leqslant 2^{k-1} \max\limits_{i=\overline{1,k}} m_i \leqslant \frac{\prod_{i=1}^{k} m_k}{\max\limits_{i=\overline{1,k}} m_i} \max\limits_{i=\overline{1,k}} m_i = \prod\limits_{i=1}^{k} m_k$. Лемма 1 доказана.

Доказательство леммы 2. Пусть $f_1, f_2, \ldots, f_k$ – разбиение множества $N(s)$. По аналогии с доказательством леммы 1 обозначим для удобства $|E_{f_i}| = m_i \geqslant 2$, $i = \overline{1,k}$, и $|E_{N(s)}| = \prod\limits_{i=1}^{k} m_i$.

Несложно увидеть, что $k - 1 \leqslant 2^{k-2} \leqslant \frac{\prod_{i=1}^{k} m_k}{\max\limits_{i=\overline{1,k-1}} m_i m_{i+1}}$. Далее, $\sum\limits_{i=1}^{k-1} m_i m_{i+1} \leqslant (k-1) \max\limits_{i=\overline{1,k-1}} m_i m_i \leqslant 2^{k-2} \max\limits_{i=\overline{1,k-1}} m_i m_i \leqslant \frac{\prod_{i=1}^{k} m_k}{\max\limits_{i=\overline{1,k-1}} m_i m_i} \max\limits_{i=\overline{1,k-1}} m_i m_i = \prod\limits_{i=1}^{k} m_k$. Лемма 2 доказана.

Доказательство теоремы 2. Пусть $f_1, f_2, \ldots, f_k$ – разбиение множества $N(s)$. Рассмотрим произвольную задачу $w \in W^D(f_1, f_2, \ldots, f_k)$. По определению 6 задача $w = w(s; M; n_1, n_2, \ldots, n_s; \{a_{F_{\overline{f}}}\}, \{b_{F_{\overline{f}}}\}, f \in M; \{c_{F_{N(s)}}\})$, где M и $\{c_{F_{N(s)}}\}$ являются $f_1, f_2, \ldots, f_k$-декомпозиционными. Не уменьшая общности, будем считать, что $M = \{\overline{f_i} | i = \overline{1,k}\} \cup \{\overline{f_i \cup f_{i+1}} | i = \overline{1, k-1}\}$, в противном случае добавим недостающие двусторонние неравенства, в качестве нижней границы которых выберем ноль, в качестве верхней – достаточно большую величину, например $\sum\limits_{F_{\overline{f'}} \in E_{\overline{f'}}} b_{F_{\overline{f'}}}$, где f' – произвольный элемент из M. Далее приведем процедуру построения задачи $v = v(G; l_{ij}, u_{ij}, e_{ij}, (i,j) \in A_G) \in W_{Graph}$, соответствующей задаче w.

Построим ориентированный граф G с множеством вершин $V_G = \{v'_{F_{f_i}}, v''_{F_{f_i}} | F_{f_i} \in E_{f_i}, i = \overline{1,k}\} \cup \{s,t\}$ и множеством дуг $A_G = A_1 \cup A_2 \cup A_3$, где

— $A_1 = \{(v'_{F_{f_i}}, v''_{F_{f_i}}) | F_{f_i} \in E_{f_i}, i = \overline{1,k}\}$;

— $A_2 = \{(v''_{F_{f_i}}, v'_{F_{f_{i+1}}}) | F_{f_i} \in E_{f_i}, F_{f_{i+1}} \in E_{f_{i+1}}, i = \overline{1, k-1}\}$;

— $A_3 = \{(s, v'_{F_{f_1}}) | F_{f_1} \in E_{f_1}\} \cup \{(v'_{F_{f_k}}, t) | F_{f_k} \in E_{f_k}\} \cup \{(t,s)\}$.

Определим функцию α следующим образом:

— каждому ограничению $d(w, \overline{f_i}, F_{f_i})$ поставим в соответствие дугу $(v'_{F_{f_i}}, v''_{F_{f_i}})$, таким образом, в задаче v нижняя и верхняя границы данной дуги будут составлять $a_{F_{f_i}}$ и $b_{F_{f_i}}$ соответственно, $F_{f_i} \in E_{f_i}$, $i = \overline{1,k}$;

— каждому ограничению $d(w, \overline{f_i \cup f_{i+1}}, F_{f_i \cup f_{i+1}})$ поставим в соответствие дугу $\big(v''_{(F_{f_i \cup f_{i+1}})_{f_i}}, v'_{(F_{f_i \cup f_{i+1}})_{f_{i+1}}}\big)$, таким образом, в задаче v нижняя и верхняя границы данной дуги будут составлять $a_{F_{f_i \cup f_{i+1}}}$ и $b_{F_{f_i \cup f_{i+1}}}$ соответственно, $F_{f_i \cup f_{i+1}} \in$ $\in E_{f_i \cup f_{i+1}}$, $i = \overline{1, k-1}$.

Так как $w \in W^D(f_1, f_2, \ldots, f_k)$, то согласно определениям 5 и 6 найдутся такие многоиндексные матрицы $\{d_{F_{f_i}}\}$, $f \in B$, что $c_{F_{N(s)}} = \sum\limits_{f \in B} d_{(F_{N(s)})_f}$, где $B = \{f_i | i =$ $= \overline{1,k}\} \cup \{f_i \cup f_{i+1} | i = \overline{1, k-1}\}$. Тогда определим стоимости дуг в задаче v следующим образом:

— $e_{v'_{F_{f_i}} v''_{F_{f_i}}} = d_{F_{f_i}}$, $F_{f_i} \in E_{f_i}$, $i = \overline{1,k}$;

— $e_{v''_{F_{f_i}} v'_{F_{f_{i+1}}}} = d_{F_{f_i} F_{f_{i+1}}}$, $F_{f_i} \in E_{f_i}$, $F_{f_{i+1}} \in E_{f_{i+1}}$, $i = \overline{1, k-1}$;

— $e_{ij} = 0$, $(i,j) \in A_3$.

По условию $f_1, f_2, \ldots, f_k$ является разбиением множества $N(s)$. Отсюда каждый элемент однозначным образом представим в виде $F_{N(s)} = F_{f_1} F_{f_2} \ldots F_{f_k}$. Введем следующее обозначение $C_{F_{N(s)}} = (s, v'_{F_{f_1}}, v''_{F_{f_1}}, v'_{F_{f_2}}, v''_{F_{f_2}}, \ldots, v'_{F_{f_k}}, v''_{F_{f_k}}, t, s)$. По построению $C(G) = \{C_{F_{N(s)}} | F_{N(s)} \in E_{N(s)}\}$. Тогда определим функцию β следующим образом: каждой переменной $x_{F_{N(s)}}$ поставим в соответствие простой цикл $C_{F_{N(s)}}$, $F_{N(s)} \in E_{N(s)}$.

Покажем, что построенная задача v совместна тогда и только тогда, когда совместна исходная задача w. Действительно, пусть $x_{F_{N(s)}}$, $F_{N(s)} \in E_{N(s)}$, – допустимое решение системы ограничений задачи w. Определим $y_{C_{F_{N(s)}}} = x_{F_{N(s)}}$, $F_{N(s)} \in E_{N(s)}$, далее пусть $z_{ij} = \sum\limits_{C \in C(G) | (i,j) \in C} y_C$, $(i,j) \in A_G$. Набор z_{ij}, $(i,j) \in A_G$, будет являться циркуляцией в графе G и по построению:

— $z_{v'_{F_{f_i}} v''_{F_{f_i}}} = \sum\limits_{F_{\overline{f_i}} \in E_{\overline{f_i}}} x_{F_{\overline{f_i}} F_{f_i}}, \quad F_{f_i} \in E_{f_i}, \quad i = \overline{1,k}$;

— $z_{v''_{(F_{f_i \cup f_{i+1}})_{f_i}} v'_{(F_{f_i \cup f_{i+1}})_{f_{i+1}}}} = \sum\limits_{F_{\overline{f_i \cup f_{i+1}}} \in E_{\overline{f_i \cup f_{i+1}}}} x_{F_{\overline{f_i \cup f_{i+1}}} F_{f_i \cup f_{i+1}}}$, $F_{f_i \cup f_{i+1}} \in E_{f_i \cup f_{i+1}}$, $i = \overline{1, k-1}$.

Тогда в соответствии с введенной функцией α набор z_{ij}, $(i,j) \in A$, будет являться допустимой циркуляцией задачи v.

Далее, пусть z_{ij}, $(i,j) \in A_G$, – допустимая циркуляция задачи v. Согласно утверждению 1 для данной циркуляции существует ее циклическая декомпозиции y_C, $C \in C(G)$. По построению:

— $a_{F_{f_i}} \leqslant \sum\limits_{F_{\overline{f_i}} \in E_{\overline{f_i}}} y_{C_{F_{\overline{f_i}} F_{f_i}}} = z_{v'_{F_{f_i}} v''_{F_{f_i}}} \leqslant b_{F_{f_i}}, \quad F_{f_i} \in E_{f_i}, \quad i = \overline{1,k};$

— $a_{F_{f_i \cup f_{i+1}}} \leqslant \sum\limits_{F_{\overline{f_i \cup f_{i+1}}} \in E_{\overline{f_i \cup f_{i+1}}}} y_{C_{F_{\overline{f_i \cup f_{i+1}}} F_{f_i \cup f_{i+1}}}} = z_{v''_{(F_{f_i \cup f_{i+1}})_{f_i}} v'_{(F_{f_i \cup f_{i+1}})_{f_{i+1}}}} \leqslant$
$b_{F_{f_i \cup f_{i+1}}}, \quad F_{f_i \cup f_{i+1}} \in E_{f_i \cup f_{i+1}}, \quad i = \overline{1, k-1}.$

Согласно введенной функции β построим следующий набор значений переменных: $x_{F_{N(s)}} = y_{C_{F_{N(s)}}}$, $F_{N(s)} \in E_{N(s)}$. Построенный набор является допустимым решением задачиw.

Пусть z_{ij}, $(i,j) \in A_G$, – циркуляция минимальной стоимости в задаче v и y_C, $C \in C(G)$, – ее циклическая декомпозиция. Используя функцию β, построим следующий набор значений переменных $x_{F_{N(s)}} = y_{C_{F_{N(s)}}}$, $F_{N(s)} \in E_{N(s)}$, который (как уже было показано) является допустимым решением задачи w. Теперь покажем от противного, что построенный набор будет оптимальным решением задачи w. Действительно, пусть это не так и $x'_{F_{N(s)}}$, $F_{N(s)} \in E_{N(s)}$, – оптимальное решение задачи w. Тогда по предположению $\sum\limits_{F_{N(s)} \in E_{N(s)}} c_{F_{N(s)}} x_{F_{N(s)}} > \sum\limits_{F_{N(s)} \in E_{N(s)}} c_{F_{N(s)}} x'_{F_{N(s)}}$. По построению $\sum\limits_{(i,j) \in A_G} e_{ij} z_{ij} = \sum\limits_{(i,j) \in A_G} e_{ij} \sum\limits_{C \in C(G) | (i,j) \in C} y_C = {}$
$= \sum\limits_{C \in C(G)} y_C \sum\limits_{(i,j) \in C} e_{ij} = \sum\limits_{F_{N(s)} \in E_{N(s)}} y_{C_{F_{N(s)}}} \sum\limits_{f \in B} d_{(F_{N(s)})_f} = \sum\limits_{F_{N(s)} \in E_{N(s)}} c_{F_{N(s)}} x_{F_{N(s)}}$. Определим $y'_{C_{F_{N(s)}}} = x'_{F_{N(s)}}$, $F_{N(s)} \in E_{N(s)}$, и $z'_{ij} = \sum\limits_{C \in C(G) | (i,j) \in C} y'_C$, $(i,j) \in A_G$. Как уже было показано ранее, построенный таким образом набор z'_{ij}, $(i,j) \in A_G$, является допустимой циркуляцией задачи v. При этом $\sum\limits_{F_{N(s)} \in E_{N(s)}} c_{F_{N(s)}} x'_{F_{N(s)}} = {}$
$= \sum\limits_{F_{N(s)} \in E_{N(s)}} c_{F_{N(s)}} y'_{F_{N(s)}} = \sum\limits_{F_{N(s)} \in E_{N(s)}} y'_{C_{F_{N(s)}}} \sum\limits_{f \in B} d_{(F_{N(s)})_f} = \sum\limits_{C \in C(G)} y'_C \sum\limits_{(i,j) \in C} e_{ij} = {}$
$= \sum\limits_{(i,j) \in A_G} e_{ij} \sum\limits_{C \in C(G) | (i,j) \in C} y'_C = \sum\limits_{(i,j) \in A_G} e_{ij} z'_{ij}$. Тогда $\sum\limits_{(i,j) \in A_G} e_{ij} z_{ij} = {}$
$= \sum\limits_{F_{N(s)} \in E_{N(s)}} c_{F_{N(s)}} x_{F_{N(s)}} > \sum\limits_{F_{N(s)} \in E_{N(s)}} c_{F_{N(s)}} x'_{F_{N(s)}} = {} = \sum\limits_{(i,j) \in A_G} e_{ij} z'_{ij}$, т.е. получаем противоречие. Таким образом, предположение неверно, и построенный набор $x_{F_{N(s)}}$, $F_{N(s)} \in E_{N(s)}$, является оптимальным решением задачи w.

Далее проведем анализ сложности вычислительных процедур, связанных с построением задачи v и построением решения задачи w по решению задачи v. Заметим, что исходная задача w содержит $|E_{N(s)}|$ переменных. По построению граф G в задаче v содержит $|V| = 2 + 2 \sum\limits_{i=1}^{k} |E_{f_i}|$ вершин и $|A| = 1 + |E_{f_i}| + |E_{f_k}| + \sum\limits_{i=1}^{k-1} |E_{f_i}||E_{f_{i+1}}|$ дуг. Применяя леммы 1 и 2, можно получить следующие оценки $|V| = O(|E_{N(s)}|)$, $|A| = {}$ $= O(|E_{N(s)}|)$. Отсюда построение задачи v требует линейных от размера задачи w вычислительных затрат. Построение решения задачи w по решению задачи v связано с построением циклической декомпозиции циркуляции в графе G. По утверждению 2 построение циклической декомпозиции требует $O(|V||A|) = O(|E_{N(s)}|^2)$ вычислительных операций. Отсюда класс $W(f_1, f_2, \ldots, f_k)$ является $L|L - equal||E_{N(s)}|^2 -$ $- cycle$ сводимым к классу W_{Graph}. Теорема 2 доказана.

Доказательство теоремы 3. Пусть $f_1, f_2, \ldots, f_k$ – разбиение множества $N(s)$ и $k \geqslant 3$. Рассмотрим множество $M = \{\overline{f_1}, \overline{f_2}, \overline{f_3}\}$. Согласно определению 4 множество M является $f_1, f_2, \ldots, f_k$-декомпозиционным. Покажем, что из существования полиномиального ε-приближенного алгоритма решения задач класса $W_Z(M)$ вытекает равенство $P = NP$, где ε – произвольная неотрицательная константа.

Рассмотрим известную NP-полную задачу о трехмерном сочетании [19]. Данная задача может быть формализована следующим образом. Пусть $U \subseteq \{1, 2, \ldots, m\}^3$, где $m \in N$. Тогда проблема заключается в проверке совместности следующей целочисленной системы линейных неравенств:

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m} y_{ijk} = 1, \quad k = \overline{1,m};$$
$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{m} y_{ijk} = 1, \quad j = \overline{1,m};$$
$$\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{m} y_{ijk} = 1, \quad i = \overline{1,m};$$
$$y_{ijk} \in \{0,1\}, \quad (i,j,k) \in U;$$
$$y_{ijk} = 0, \quad (i,j,k) \in \{1, 2, \ldots, m\}^3 \backslash U.$$

Выберем задачу $w_Z \in W_Z(M)$, которая удовлетворяет условиям $|E_{f_1}| = |E_{f_2}| = |E_{f_3}| = m$. Тогда перенумеруем элементы множеств E_{f_l}, $l = \overline{1,3}$, следующим образом: $E_{f_l} = \{F_{f_l,1}, F_{f_l,2}, \ldots, F_{f_l,m}\}$, $l = \overline{1,3}$. Так как f_1, f_2, f_3, f' – разбиение множества $N(s)$, где $f' = N(s) \backslash (f_1 \cup f_2 \cup f_3)$, то любой элемент $F_{N(s)} \in E_{N(s)}$ может быть представлен в виде $F_{N(s)} = F_{f_1} F_{f_2} F_{f_3} F_{f'}$. Стоимости $c_{F_{N(s)}}$, $F_{N(s)} \in E_{N(s)}$, определим следующим образом. Пусть $c_{F_{N(s)}} = 0$, если $F_{N(s)} = F_{f_1,i} F_{f_2,j} F_{f_3,k} F_{f'}$, где $(i,j,k) \in U$ и $F_{f'} = (1, 1, \ldots, 1)$; $c_{F_{N(s)}} = 1$ иначе. Наконец, определим значения свободных коэффициентов двусторонних неравенств в задаче w_Z. Пусть $a_{F_{f_l}} = b_{F_{f_l}} = 1$, где $F_{f_l} \in E_{f_l}$, $l = \overline{1,3}$.

Обозначим через $OPT(w_Z)$ оптимальное значение критерия выбранной задачи w_Z. Легко увидеть, что $OPT(w_Z) = 0$ тогда и только тогда, когда система ограничений проблемы трехмерного сочетания совместна. При этом если $OPT(w_Z) \neq 0$, то $OPT(w_Z) \geqslant 1$.

Пусть существует полиномиальный ε-приближенный алгоритм H решения задач класса $W_Z(M)$, где $\varepsilon \geqslant 0$. Обозначим через $H(w_z)$ допустимое решение, найденное алгоритмом H, значение критерия задачи w_Z на решение $H(w_z)$ обозначим через $c(H(w_z))$. Если $c(H(w_z)) = 0$, то $OPT(w_Z) = 0$ и система ограничений проблемы трехмерного сочетания совместна. Если $c(H(w_z)) \neq 0$, то $c(H(w_z)) \geqslant 1$. Но так как H – полиномиальный ε-приближенный, то выполняется условие $1 \leqslant c(H(w_z)) \leqslant OPT(w_Z)(1+\varepsilon)$, отсюда $OPT(w_Z) \geqslant 1/(1+\varepsilon) > 0$. Так как $OPT(w_Z) \neq 0$, то система ограничений проблемы трехмерного сочетания несовместна.

Следовательно, можно предложить следующий полиномиальный алгоритм решения проблемы о трехмерном сочетании. Для выбранной проблемы трехмерного сочетания построить соответствующую задачу $w_Z \in W_Z(M)$ согласно изложенной выше схеме. Далее применить полиномиальный ε-приближенный алгоритм H для решения задачи w_Z. Если $c(H(w_z)) = 0$, то система ограничений проблемы о трехмерном сочетании совместна; в противном случае – несовместна. Но так как проблема трехмерного сочетания является NP-полной, то из существования полиномиального алгоритма ее решения следует, что $P = NP$ [19]. Теорема 3 доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Афраймович Л.Г., Прилуцкий М.Х.* Многоиндексные задачи распределения ресурсов в иерархических системах // АиТ. 2006. № 6. С.194–205.
2. *Афраймович Л.Г., Прилуцкий М.Х.* Многопродуктовые потоки в древовидных сетях // Изв. РАН. Теория и системы управления. 2008. № 2. С. 57–63.
3. *Прилуцкий М.Х.* Многокритериальные многоиндексные задачи объемно-календарного планирования // Изв. РАН. Теория и системы управления. 2007. № 1. С. 78–82.
4. *Прилуцкий М.Х.* Многокритериальное распределение однородного ресурса в иерархических системах // АиТ. 1996. № 2. С. 139–146.
5. *Костюков В.Е., Прилуцкий М.Х.* Распределение ресурсов в иерархических системах. Оптимизационные задачи добычи, транспорта газа и переработки газового конденсата. Нижний Новгород: Изд-во Нижегород. гос. ун-та, 2010.
6. *Lim A., Rodrigues B., Zhang X.* Scheduling sports competitions at multiple venues – Revisited // Europ. J. Oper. Res. 2006. V. 175. P. 171–186.
7. *Gunawan A., Ng K.M., Poh K.L.* Solving the teacher assignment-course scheduling problem by a hybrid algorithm // Int. J. Comput. Inform. Engin. 2007. V. 1. No. 2. P. 137–142.
8. *Storms P.P.A., Spieksma F.C.R.* An LP-based algorithm for the data association problem in multitarget tracking // Comput. Oper. Res. 2003. V. 30. No. 7. P. 1067–1085.
9. *Poore A.B.* Multidimensional assignment formulation of data association problems arising from multitarget and multisensor tracking // Comput. Optim. Appl. 1994. V. 3. No. 1. P. 27–57.
10. *Схрейвер А.* Теория линейного и целочисленного программирования. В 2 т. М.: Мир, 1991.
11. *Пападимитриу Х., Стайглиц К.* Комбинаторная оптимизация. Алгоритмы и сложность. М.: Мир, 1985.
12. *Гейл Д.* Теория линейных экономических моделей. М.: Мир, 1969.
13. *Раскин Л.Г., Кириченко И.О.* Многоиндексные задачи линейного программирования. М.: Радио и связь, 1982.
14. *Емеличев В.А., Ковалев М.М., Кравцов М.К.* Многогранники, графы, оптимизация. М.: Наука, 1981.
15. *Bandopadhyaya L., Puri M.C.* Impaired flow multi-index transportation problem with axial constraints // J. Austral. Math. Society. Ser. B. 1988. 29(3). P. 296–309.
16. *Junginger W.* On representatives of multi-index transportation problems // Eur J. Oper. Res. 1993. V. 66(3). P. 353–371.
17. *De Loera J. A., Kim E.D., Onn S., Santos F.* Graphs of transportation polytopes // J. Combinat. Theory. Ser. A. 2009. V. 116. No. 8. P. 1306–1325.
18. *Кравцов М.А., Крачковский А.П.* О некоторых свойствах трехиндексных транспортных многогранников // Дискретная математика. 1999. Т. 11. Вып. 3. С. 109–125.
19. *Гэри М., Джонсон Д.* Вычислительные машины и труднорешаемые задачи. М.: Мир, 1982.
20. *Crama Y., Spieksma F.C.R.* Approximation algorithms for three-dimensional assignment problems with triangle inequalities // Eur. J. Oper. Res. 1992. V. 60. P. 273–279.
21. *Финкельштейн Ю.Ю.* Приближенные методы и прикладные задачи дискретного программирования. М.: Наука, 1976.
22. *Spieksma F.C.R.* Multi index assignment problems: complexity, approximation, applicationsю / P.M. Pardalos, L.S. Pitsoulis (Eds.). Nonlinear Assignment Problems. Algorithms and Applications. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 2000. P. 1–11.
23. *Гимади Э.Х., Коркишко Н.М.* Об одном алгоритме решения трехиндексной аксиальной задачи о назначениях на одноциклических подстановках // Дискретный анализ и исследование операций. Сер. 1. 2003. Т. 10. № 2. С. 56–65.
24. *Гимади Э.Х., Глазков Ю.В.* Об асимптотически точном алгоритме решения одной модификации трехиндексной планарной задачи о назначениях // Дискретный анализ и исследование операций. Сер. 2. 2006. Т. 13. № 1. С. 10–26.

25. *Сергеев С.И.* Новые нижние границы для трипланарной задачи назначения. Использование классической модели // АиТ, 2008. № 12. С. 53–75.
26. *Ahuja R.K., Magnati T.L., Orlin J.B.* Network flows: theory, algorithms, and applications. N.J.: Prentice Hall, 1993.
27. *Galil Z., Tardos E.* An mincost flow algorithm // J. ACM. 1988. V. 35. No. 2. P. 374–386.
28. *Goldberg A.V., Rao S.* Beyond the flow decomposition barrier // J. ACM. 1998. V. 45. No. 5. P. 783–797.
29. *Литвак Б.Г., Раппопорт А.М.* Задачи линейного программирования, допускающие сетевую постановку // Экономика и мат. методы. 1970. Т. 6. Вып. 4. С. 594–604.
30. *Lin Y.* A recognition problem in converting linear programming to network flow models // Appl. Math. J. Chinese Univer. 1993. V. 8. No. 1. P. 76–85.
31. *Ковалев М.М.* Матроиды в дискретной оптимизации. М.: Едиториал УРСС, 2003.
32. *Gülpinar N., Gutin G., Mitra G., Zverovitch A.* Extracting pure network submatrices in linear programs using signed graphs // Discrete Appl. Math. 2004. V. 137. No. 3. P. 359–372.
33. *Афраймович Л.Г.* Трехиндексные задачи линейного программирования с вложенной структурой // АиТ. 2011. № 8.
34. *Афраймович Л.Г.* Циклическая сводимость многоиндексных систем линейных неравенств транспортного типа // Изв. РАН. Теория и системы управления. 2010. № 4. С. 83–90.
35. *Burkard R.E., Rudolf R., Woeginger G.J.* Three-dimensional axial assignment problems with decomposable cost coefficients // Discrete Appl. Math. 1996. V. 65. P. 123–139.
36. *Bandelt H.J., Crama Y., Spieksma F.C.R.* Approximation algorithms for multidimensional assignment problems with decomposable costs // Discret. Appl. Math. 1994. V.49. P. 25–50.
37. *Queyranne M., Spieksma F.C.R.* Approximation algorithms for multi-index transportation problems with decomposable costs // Discret. Appl. Math. 1997. V. 76. P. 239–253.
38. *Chen B., Potts C.N., Woeginger G.J.* A review of machine scheduling. Complexity, algorithms and approximability. Handbook of Combinatorial Optimization. Kluwer Academic Publishers. 1998. V. 3. P. 21–169.
39. *Канатников А.Н., Крищенко А.П.* Линейная алгебра. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2002.

Статья представлена к публикации членом редколлегии А.А. Лазаревым.

Поступила в редакцию 21.03.2011