Автоматика и телемеханика, № 8, 2011

Системный анализ и исследование операций

© 2011 г. **Л.Г. АФРАЙМОВИЧ, канд. физ.-мат. наук**
(Нижегородский государственный университет)

ТРЕХИНДЕКСНЫЕ ЗАДАЧИ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ С ВЛОЖЕННОЙ СТРУКТУРОЙ

Рассматриваются вопросы решения многоиндексных задач линейного программирования транспортного типа. В качестве метода решения предлагается подход, основанный на исследовании сводимости многоиндексных транспортных задач к потоковым алгоритмам. Предлагаются достаточные условия сводимости многоиндексных задач, связанные с исследованием вложенности системы ограничений задачи. Показывается, что данные условия являются необходимыми и достаточными для сводимости трехиндексных задач, иначе неверной является известная гипотеза о неравенстве классов P и NP.

1. Введение

Существует широкий класс прикладных задач распределения ресурсов, формализуемых в виде многоиндексных задач линейного программирования транспортного типа. Примерами таких задач являются [1–4] транспортная задача с промежуточными пунктами, задача объемно-календарного планирования для подразделений предприятия, задача распределения мощностей каналов передачи данных провайдерами сети Интернет, задача формирования портфеля заказов и др. Многоиндексные задачи линейного программирования также возникают в области компьютерного зрения [5, 6]. Таким образом разработка эффективных методов решения специального подкласса задач линейного программирования – многоиндексных задач линейного программирования транспортного типа – делает возможным сокращение вычислительных затрат при решении ряда важных прикладных и теоретических задач.

Для решения рассматриваемых многоиндексных транспортных задач могут быть применены общие методы решения задач линейного программирования – симплекс-метод, алгоритм Кармаркара [7, 8]. Также существует ряд работ, посвященных непосредственно методам решения многоиндексных задач линейного программирования. Наиболее изученным является класс двухиндексных задач [9]. Частные подклассы трех- и четырехиндексных задач рассматриваются, например, в [10–12]. В общей постановке многоиндексные задачи рассматриваются в [10]. Условия, при которых удается понизить размерность и (или) сократить количество индексов многоиндексных транспортных задач, обсуждаются в [13, 14]. Геометрические свойства множества допустимых решений многоиндексных систем линейных неравенств обсуждаются в [11, 15, 16].

Интерес представляет решение целочисленных многоиндексных задач линейного программирования транспортного типа. Как известно, двухиндексная задача целочисленного линейного программирования разрешима за полиномиальное время [9].

Однако данная задача является NP-трудной уже в трехиндексном случае [17, 18]. Также существует ряд работ, посвященных разработке приближенных полиномиальных алгоритмов решения целочисленных многоиндексных транспортных задач [19, 20].

Одним из перспективных направлений при разработке эффективных алгоритмов исследования многоиндексных задач линейного программирования является нахождение подклассов задач, для решения которых применимы потоковые методы. Важное влияние на развитие данного направления оказывают активные исследования в области сетевой оптимизации [21]. Существующие эффективные потоковые алгоритмы [22, 23] позволяют в случае сводимости задач линейного программирования к потоковым задачам построить алгоритмы их решения, превосходящие по своим оценкам вычислительной сложности общие методы решения задач линейного программирования. Возможность сводимости задач линейного программирования к потоковым алгоритмам исследовалась в [24–27], важным различием которых являются применяемые концепции сводимости. Проблема сводимости многоиндексных транспортных задач линейного программирования является менее исследованной. Известно о сводимости двухиндексных задач к потоковым алгоритмам [9].

Для многоиндексных задач с произвольным числом индексов проблема сводимости к потоковым алгоритмам впервые рассматривалась (исходя из известной литературы) в [1]. Концепция сводимости, применяемая в [1], является расширением подхода, предложенного в [24]. Важной особенностью данной концепции является существование соответствия между переменными исходной задачи и дугами вспомогательной сети. Предлагаемая схема сведения гарантирует, что произвольный оптимальный поток вспомогательной сети будет определять такое оптимальное решение исходной задачи, в котором переменным присваивается значение потока вдоль соответствующих дуг сети. При использовании данной концепции в [1] были найдены достаточные условия сводимости. В случае выполнения данных условий сводимости решение многоиндексной задачи линейного программирования транспортного типа сводится к поиску потока минимальной стоимости в сети с $O(m+n)$ вершинами и $O(m+n)$ дугами, где n – количество переменных, m – количество неравенств системы ограничений исходной задачи.

При исследовании сводимости многоиндексных систем линейных неравенств в [28] была предложена концепция циклической сводимости. Предлагаемая схема сведения гарантирует, что произвольный допустимый поток вспомогательной сети будет определять такое допустимое решение исходной системы, в котором переменным присваивается значение потока вдоль соответствующих им циклов сети. При выполнении достаточных условий сводимости работы [28] решение многоиндексной системы линейных неравенств сводится к поиску допустимого потока в сети с $O(sn)$ вершинами и $O(sn^2)$ дугами, где n – количество переменных, s – количество индексов многоиндексной системы линейных неравенств. Предлагаемый подход также применим при исследовании целочисленных систем линейных неравенств. Важно отметить существование ряда целочисленных системы линейных неравенств, для которых выполняются достаточные условия сводимости работы [28] и при этом соответствующая матрица ограничений не является абсолютно унимодулярной. В качестве примера можно выделить систему ограничений NP-трудной трехиндексной аксиальной задачи о назначениях [29].

Данная работа является продолжением исследований, начатых в [1]. Здесь приводится расширение концепции сводимости задач линейного программирования. В рамках введенной концепции доказано, что классы задач линейного программирования при их сводимости к классу задач поиска потока минимальной стоимости обладают рядом важных свойств. Показывается, что достаточные условия сводимости, предложенные в [1], являются необходимыми и достаточными условиями сводимости трехиндексных задач линейного программирования к задаче поиска потока минимальной стоимости, иначе неверной является известная гипотеза о неравенстве классов P и NP [17].

2. Многоиндексные транспортные задачи

При постановке многоиндексных задач линейного программирования транспортного типа воспользуемся формализацией, введенной в [10]. Пусть $s \in N$ и $N(s) = \{1,\ldots,s\}$. Каждому числу l поставим в соответствие параметр j_l, называемый индексом, который принимает значения из множества $J_l = \{1,\ldots,n_l\}$, где $n_l \geq 2$, $l \in N(s)$. Пусть $f = \{k_1,\ldots,k_t\} \subseteq N(s)$. Набор значений индексов $F_f = (j_{k_1},\ldots,j_{k_t})$ будем называть t-индексом, а множество всех t-индексов определим как декартово произведение множеств допустимых значений соответствующих индексов и будем обозначать через $E_f = J_{k_1} \times \ldots \times J_{k_t}$. Каждому набору F_f поставим в соответствие действительное число z_{F_f}, $F_f \in E_f$. Данное отображение множества t-индексов E_f в множество действительных чисел назовем (как и в [10]) t-индексной матрицей и обозначим через $\{z_{j_{k_1},\ldots,j_{k_t}}\} = \{z_{F_f}\}$. Пусть $\overline{f} = N(s)\backslash f$. Тогда через $F_{N(s)} = F_f F_{\overline{f}}$ будем обозначать s-индексный набор $(j_{k_1},\ldots,j_{k_t},j_{k_{t+1}},\ldots,j_{k_s})$. Введем следующее обозначение

$$\sum_{F_f \in E_f} z_{F_f F_{\overline{f}}} = \sum_{j_{k_1} \in J_{k_1}} \cdots \sum_{j_{k_t} \in J_{k_t}} z_{F_f\, F_{\overline{f}}}, \quad F_{\overline{f}} \in E_{\overline{f}}.$$

Пусть M – заданное множество, $M \subseteq 2^{N(s)}$; $\{a_{F_{\overline{f}}}\}$, $\{b_{F_{\overline{f}}}\}$ – заданные $|\overline{f}|$-индексные матрицы свободных коэффициентов, $0 \leq a_{F_{\overline{f}}} \leq b_{F_{\overline{f}}}$, $F_{\overline{f}} \in E_{\overline{f}}$, $f \in M$; $\{c_{F_{N(s)}}\}$ – заданная s-индексная матрица коэффициентов целевой функции; $\{x_{F_{N(s)}}\}$ – s-индексная матрица неизвестных. Тогда многоиндексная задача линейного программирования транспортного типа формализуется следующим образом:

$$a_{F_{\overline{f}}} \leq \sum_{F_f \in E_f} x_{F_f F_{\overline{f}}} \leq b_{F_{\overline{f}}}, \quad F_{\overline{f}} \in E_{\overline{f}}, \quad f \in M, \tag{1}$$

$$x_{F_{N(s)}} \geq 0, \quad F_{N(s)} \in E_{N(s)}, \tag{2}$$

$$\sum_{F_N(s) \in E_{N(s)}} c_{F_{N(s)}} x_{F_{N(s)}} \to \min. \tag{3}$$

Далее матрицу системы ограничений многоиндексной задачи линейного программирования (1)–(3) при заданном множестве M и заданных параметрах n_l, $l \in N(s)$, будем обозначать через $D(M,n_1,\ldots,n_s)$. Пусть $D(M) = \{D(M,n_1,\ldots,n_s) | n_l \in N, n_l \geq 2, l \in N(s)\}$ – класс матриц систем ограничений многоиндексных задач линейного программирования, определяемых заданным множеством $M \subseteq 2^{N(s)}$.

3. Концепция сводимости

Приведем формализацию концепции сводимости, которую далее будем использовать при исследовании сводимости многоиндексных задач к потоковым алгоритмам.

Пусть $A \in R^{n \times m}$, $b, b^-, b^+ \in R^n$, $c \in R^m$ – заданные параметры, $x \in R^m$ – вектор неизвестных. Через $w(A,b,c)$ будем обозначать задачу линейного программирования $\min\{(c,x) | Ax \leq b, x \geq 0\}$; через $w(A,b^-,b^+,c)$ – задачу линейного программирования $\min\{(c,x) | b^- \leq Ax \leq b^+, x \geq 0\}$. Для удобства через $row(A)$ и $col(A)$ будем обозначать количество строк и столбцов матрицы A соответственно. Отметим, что задача $w(A,b^-,b^+,c)$ может быть описана с использованием обозначения вида $w(A,b,c)$. Тем не менее будем использовать обозначение $w(A,b^-,b^+,c)$ в случае, когда хотим подчеркнуть, что система ограничений задачи представляет собой систему двусторонних неравенств. Также будем рассматривать задачи целочисленного линейного программирования. Если $w = w(A, b, c)$ – задача линейного программирования, то через w_Z обозначим задачу целочисленного линейного программирования $w_Z = \min\left\{(c, x)|Ax \le b, x \in {Z_+}^{col(A)}\right\}$. Пусть W – произвольный класс задач линейного программирования. Соответствующий класс задач целочисленного линейного программирования определим как $W_Z = \{w_Z | w \in W\}$.

Далее рассмотрим два класса задач линейного программирования W' и W''. На содержательном уровне под сводимостью класса W' к классу W'' понимается возможность построения для произвольной задачи $w' \in W'$ соответствующей задачи $w'' \in W''$ таким образом, чтобы решение задачи w'' определяло решение задачи w'. При формализации конкретной схемы сведения будем определять временные затраты и (или) конкретные вычислительные процедуры, связанные с:

– построением матрицы системы ограничений задачи w'' по исходным параметрам задачи w';

– построением свободных коэффициентов и коэффициентов целевой функции задачи w'' по исходным параметрам задачи w';

– построением решения задачи w' по решению задачи w''.

Определение 1. Будем говорить, что класс W' является $t_1|t_2|t_3$ сводимым к классу W'', если для любой задачи $w' = w(A', b', c') \in W'$ можно за время $O(t_1)$ построить матрицу A'', за время $O(t_2)$ построить векторы b'', c'', такие что $w'' = w(A'', b'', c'') \in W''$, и при этом

— *задача w' совместна (ограничена) тогда и только тогда, когда совместна (ограничена) задача w'';*
— *оптимальное (допустимое) решение x' задачи w' может быть построено за время $O(t_3)$, если известно оптимальное (допустимое) решение задачи w''.*

Построенную задачу w'' определения 1 будем называть задачей, соответствующей задаче w'. Если функции t_1, t_2, t_3 являются линейными функциями, зависящими от размера индивидуальной задачи w', то такую сводимость будем обозначать через $L|L|L$; если соответствующие функции являются полиномиальными (и степень соответствующих полиномов не представляет интерес в данном контексте), сводимость будем обозначать через $P|P|P$.

Формализация конкретных схем сведения иногда требует кроме временных затрат дополнительно определить и сами вычислительные процедуры, связанные с соответствующими построениями. Тогда при формализации концепции сводимости будем пользоваться обозначением $t_1 - s_1|t_2 - s_2|t_3 - s_3$, где s_1, s_2, s_3 – опциональные строковые обозначения вычислительных процедур, связанных с построением: матрицы системы ограничений; свободных коэффициентов и коэффициентов целевой функции; решения задачи соответственно. Данное обозначение вводится по аналогии с нотацией Р. Грэхема (R. Graham), используемой при классификации задач теории расписаний [30].

Интересен вопрос о возможности сведения класса многоиндексных задач линейного программирования транспортного типа к классу задач поиска потока минимальной стоимости. Соответствующие классы определяются следующим образом.

Пусть $M \subseteq 2^{N(s)}$, тогда класс многоиндексных задач линейного программирования транспортного типа с системой ограничений, соответствующей заданному множеству M, определим как

$$W(M) = \left\{w(A, b^-, b^+, c)| \quad b^- b^+ \in {Z_+}^{row(A)},\ c \in Z^{col(A)},\ A \in D(M)\right\}.$$

Согласно введенному ранее обозначению соответствующий класс многоиндексных задач целочисленного линейного программирования зададим как $W_Z(M)$.

Рассмотрим ориентированный граф $G = (V_G, A_G)$, $A_G \subseteq V_G^2$, здесь V_G и A_G – множество вершин и дуг графа G соответственно. Пусть l_{ij}, u_{ij} – пропускные способности дуги (i, j); e_{ij} – стоимость дуги (i, j); x_{ij} – неизвестная величина потока вдоль дуги (i, j), $(i, j) \in A_G$. Тогда через $v(G; l_{ij}, u_{ij}, e_{ij}, (i, j) \in A_G)$ обозначим следующую задачу поиска потока минимальной стоимости:

$$\sum_{(i,j)\in A_G} x_{ij} - \sum_{(j,i)\in A_G} x_{ji} = 0, \quad i \in V_G,$$
$$l_{ij} \le x_{ij} \le u_{ij}, \quad (i, j) \in A_G,$$
$$x_{ij} \ge 0, \quad (i, j) \in A_G,$$
$$\sum_{(i,j)\in A_G} e_{ij} x_{ij} \to \min .$$

Обозначим через $Graph$ множество всех ориентированных графов. Класс задач поиска потока минимальной стоимости определим как

$$W_{Graph} = \{v(G, l_{ij}, u_{ij}, e_{ij}, (i, j) \in A_G) | l_{ij}, u_{ij} \in Z_+, e_{ij} \in Z, (i, j) \in A_G, G \in Graph\} .$$

Определение 2. *Пусть W – класс задач линейного программирования с двусторонней системой линейных неравенств. Будем говорить, что класс W является $t_1|t_2 - equal|t_3 - edge$ сводимым к классу W_{Graph}, если класс W является $t_1|t_2|t_3$ сводимым к классу W_{Graph}; и если $v = v(G; l_{ij}, u_{ij}, e_{ij}, (i, j) \in A_G) \in W_{Graph}$ является задачей, соответствующей задаче $w = w(A, b^-, b^+, c) \in W$, то выполняются следующие условия. Найдутся такие инъективные функции $\alpha : \{1, 2, \dots, row(A)\} \to A_G$, $\beta : \{1, 2, \dots, col(A)\} \to A_G$, что*

- *$l_{\alpha(i)} = b_i^-$, $u_{\alpha(i)} = b_i^+$, $i = \overline{1, row(A)}$; $l_{(u,v)} = 0$, $u_{uv} = b^*$, $(u, v) \in A_G \backslash \{\alpha(i) | i = \overline{1, row(A)}\}$, где b^* некоторая достаточно большая величина, для определенности $b^* = \sum_{k=1}^{row(A)} b_k^+$;*
- *$e_{\beta(i)} = c_i$, $i = \overline{1, col(A)}$; $e_{uv} = 0$, $(u, v) \in A_G \backslash \{\beta(i) | i = \overline{1, col(A)}\}$;*
- *если x_{ij}, $(i, j) \in A_G$, является оптимальным (допустимым) решением задачи v, то $y = (x_{\beta(1)}, x_{\beta(2)}, \dots, x_{\beta(col(A))})$ будет являться оптимальным (допустимым) решением задачи w.*

Таким образом согласно определению 2 в случае $t_1|t_2 - equal|t_3 - edge$ сводимости класса W к классу W_{Graph} гарантируется, что если $w \in W$, $v = v(G; l_{ij}, u_{ij}, c_{ij}, (i, j) \in A_G) \in W_{Graph}$ и v является задачей, соответствующей задаче w, то при построении задачи поиска потока минимальной стоимости v пропускные способности и стоимости дуг в задаче определяются через коэффициенты задачи w, а решение задачи w находится через подмножество компонент решения задачи v. Тогда можно предложить алгоритм решения задачи w, основанный на решении соответствующей задачи v и имеющий вычислительную сложность $O(t_1 + t_2 + t_3 + \mu(|V_G|, |A_G|))$, где $\mu(n, m)$ – вычислительная сложность алгоритма решения задачи поиска потока минимальной стоимости в сети с n вершинами и m дугами. Обзор оценок вычислительной сложности для известных потоковых алгоритмов можно найти, например, в [22, 23]. Далее в работе рассматриваются условия, при которых класс $W(M)$ является $t_1|t_2 - equal|t_3 - edge$ сводимым к классу W_{Graph}.

4. Условия сводимости многоиндексных задач

Вид задач линейного программирования класса $W(M)$ определяется заданным множеством M. Поэтому проблема заключается в нахождении условий, которым должно удовлетворять множество M, чтобы решение задач класса $W(M)$ могло быть найдено при помощи потоковых алгоритмов. Покажем, что задачи линейного программирования при их сводимости к поиску потока минимальной стоимости обладают рядом свойств. Данные свойства, в частности, будут использованы при исследовании сводимости трехиндексных классов $W(M)$.

Теорема 1. *Если класс W является $P|P-equal|P-edge$ сводимым к классу W_{Graph}, то класс задач целочисленного линейного программирования W_Z разрешим за полиномиальное время.*

Следствие 1. *Если класс задач целочисленного линейного программирования W_Z является NP-трудным, то класс задач линейного программирования W не является $P|P-equal|P-edge$ сводимым к классу W_{Graph} в противном случае* P = NP.

Лемма 1. *Пусть $M \subseteq 2^{N(s)}$. Если класс $W(M)$ является $P|P-equal|P-edge$ сводимым к классу W_{Graph}, то класс $W(M')$ также является $P|P-equal|P-edge$ сводимым к классу W_{Graph} где $M' \subseteq M$.*

Лемма 2. *Пусть $M \subseteq 2^{N(s)}$. Если класс $W(M)$ не является $P|P-equal|P-$ $-edge$ сводимым к классу W_{Graph}, то класс $W(M')$ также не является $P|P-$ $-equal|P-edge$ сводимым к классу W_{Graph} где $M \subseteq M' \subseteq 2^{N(s)}$.*

Лемма 3. *Пусть $M \subseteq 2^{N(s)}$. Если класс $W(M)$ является $P|P-equal|P-edge$ сводимым к классу W_{Graph}, то класс $W(M \cup \{\varnothing\})$ также является $P|P-equal|P-$ $-edge$ сводимым к классу W_{Graph}.*

Определение 3. *Множество M, $M \subseteq 2^{N(s)}$, называется k-вложенным, если существует разбиение множества M на k подмножеств $M_i = \left\{f_1^{(i)}, \ldots, f_{m_i}^{(i)}\right\}$, $i = \overline{1,k}$, что $f_j^{(i)} \subseteq f_{j+1}^{(i)}$, $j = \overline{1, m_i - 1}$, $i = \overline{1,k}$.*

Ранее были найдены следующие достаточные условия сводимости.

Теорема 2 [1]. *Пусть $M \subseteq 2^{N(s)}$. Для того чтобы класс $W(M)$ являлся $L|L-$ $-equal|L-edge$ сводимым к классу W_{Graph}, достаточно, чтобы множество M было 2-вложенным.*

Конструктивная схема доказательства теоремы 2, предложенная в [1], в случае 2-вложенности множества M позволяет для каждой задачи $w \in W(M)$ построить соответствующую ей задачу $v = v(G; l_{ij}, u_{ij}, e_{ij}, (i,j) \in A_G) \in W_{Graph}$. При этом $|V_G| = O(|E_{N(s)}|)$, $|A_G| = O(|E_{N(s)}|)$, где величина $|E_{N(s)}|$ фактически совпадает с количеством переменных задачи w. Согласно определению в случае $L|L-equal|L-$ $-edge$ сводимости построение соответствующей задачи и нахождение решения исходной задачи по решению соответствующей задачи требует линейного времени. Пусть $\mu(n,m)$ – вычислительная сложность алгоритма решения задачи поиска потока минимальной стоимости в сети с n вершинами и m дугами. Тогда если множество M является 2-вложенным, то любая из задач $w(A, b^-, b^+, c) \in W(M)$ разрешима за время $O(\mu(|E_{N(s)}|, |E_{N(s)}|))$.

Далее рассмотрим случай трехиндексных задач линейного программирования.

Теорема 3. *Пусть $M \subseteq 2^{N(s)}$, $s \leq 3$. Для того чтобы класс $W(M)$ являлся $P|P-equal|P-edge$ сводимым к классу W_{Graph} необходимо и достаточно, чтобы множество M было 2-вложенным, иначе* P = NP.

Таким образом, условие 2-вложенности является необходимым и достаточным условием $P|P-equal|P-edge$ сводимости класса трехиндексных задач линейного программирования транспортного типа к классу задач поиска потока минимальной стоимости в противном случае неверной является известная гипотеза о неравенстве классов P и NP.

5. Численные примеры

Приведем ряд примеров многоиндексных задач линейного программирования транспортного типа, иллюстрирующих полученные результаты.

Пример 1. $s = 3$, $N(s) = \{1, 2, 3\}$, $M = \{\{1, 2, 3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{3\}\}$. Тогда задачи класса $W(M)$ определяются следующим образом:

$$a^- \leq \sum_{j_1 \in J_1} \sum_{j_2 \in J_2} \sum_{j_3 \in J_3} x_{j_1 j_2 j_3} \leq a^+;$$

$$b^-_{j_3} \leq \sum_{j_1 \in J_1} \sum_{j_2 \in J_2} x_{j_1 j_2 j_3} \leq b^+_{j_3}, \quad j_3 \in J_3;$$

$$c^-_{j_2} \leq \sum_{j_1 \in J_1} \sum_{j_3 \in J_3} x_{j_1 j_2 j_3} \leq c^+_{j_2}, \quad j_2 \in J_2;$$

$$d^-_{j_1 j_2} \leq \sum_{j_3 \in J_3} x_{j_1 j_2 j_3} \leq d^+_{j_1 j_2}, \quad j_1 \in J_2, \quad j_2 \in J_2;$$

$$x_{j_1 j_2 j_3} \geq 0, \quad j_1 \in J_1, \quad j_2 \in J_2, \quad j_3 \in J_3.$$

Можно увидеть, что множество M в данном примере является 2-вложенным, так как существует разбиение $M_1 = \{\{1, 2, 3\}, \{1, 2\}\}$, $M_2 = \{\{1, 3\}, \{3\}\}$. Отсюда согласно теореме 2 класс $W(M)$ является $L|L - equal|L - edge$ сводимым к классу W_{Graph}.

Пример 2. $s = 5$, $N(s) = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $M = \{\{1, 2, 3, 4, 5\}, \{2, 3, 4, 5\}, \{1, 2, 3\}, \{2, 3\}, \{2\}, \{5\}\}$. Можно увидеть, что множество M является 2-вложенным, так как существует разбиение $M_1 = \{\{1, 2, 3, 4, 5\}, \{2, 3, 4, 5\}, \{5\}\}$, $M_2 = \{\{1, 2, 3\}, \{2, 3\}, \{2\}\}$. Отсюда согласно теореме 2 класс $W(M)$ является $L|L - equal|L - edge$ сводимым к классу W_{Graph}.

Пример 3. $s = 3$, $N(s) = \{1, 2, 3\}$, $M = \{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}\}$. Множество M не является 2-вложенным. При этом в трехиндексном случае условие 2-вложенности согласно теореме 3 является необходимым и достаточным условием сводимости многоиндексных задач к задаче поиска потока минимальной стоимости, иначе P = NP. Тогда класс $W(M)$ не является $P|P - equal|P - edge$ сводимым к классу W_{Graph}, или P = NP.

Пример 4. $s = 4$, $N(s) = \{1, 2, 3, 4\}$, $M = \{\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \varnothing\}$. Множество M не является 2-вложенным. Несложно увидеть, что класс задач целочисленного линейного программирования $W_Z(M)$ является NP-трудным, так как к нему сводится NP-трудный класс планарных трехиндексных задач о назначении (доказательство NP-трудности данного класса задач о назначении приведено в [18]). Отсюда согласно следствию 1 класс $W(M)$ не является $P|P - equal|P - edge$ сводимым к классу W_{Graph}, или P = NP.

6. Заключение

Данная работа является продолжением исследований, начатых в [1]. Здесь приводится формализация концепции сводимости задач линейного программирования, которая может быть использована для классификации результатов в данной области. В частности, введенная концепция применена при формализации сводимости задач линейного программирования к задаче поиска потока минимальной стоимости, когда решение исходной задачи определяется как подмножество компонент решения потоковой задачи.

Показано, что условие 2-вложенности является необходимым и достаточным условием $P|P - equal|P - edge$ сводимости трехиндексных задач линейного программирования транспортного типа к задаче поиска потока минимальной стоимости в случае выполнения известной гипотезы о том, что $\mathrm{P} \neq \mathrm{NP}$. С другой стороны (как было установлено в [1]) условие 2-вложенности является достаточным условием $L|L-equal|L-edge$ сводимости многоиндексных задач к задаче поиска потока минимальной стоимости. Таким образом, оказывается, что в трехиндексном случае, применяя концепцию $P|P-equal|P-edge$ сводимости, возможно свести к задаче поиска потока минимальной стоимости лишь те классы многоиндексных задач, которые можно было свести, применяя концепцию $P|P-equal|P-edge$ сводимости (если $\mathrm{P} \neq \mathrm{NP}$). Отсюда схема сведения теоремы 2 в трехиндексном случае представляет собой в некотором смысле наиболее эффективную и исчерпывающую схему сведения в связи с тем, что увеличение вычислительных затрат на сведение (в случае их полиномиальной вычислительной сложности) не приводит к расширению класса сводимых многоиндексных задач.

Дальнейшее направление исследований связанно с проверкой гипотезы о том, что условие 2-вложенности является необходимых и достаточных условием $L|L-$ $-equal|L-edge$ сводимости для произвольного числа индексов. Интерес представляет разработка новых концепций сводимости многоиндексных задач линейного программирования к потоковым алгоритмам с целью расширения классов многоиндексных задач, для решения которых применимы потоковые алгоритмы.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Доказательство теоремы 1. Пусть выполняются условия теоремы. Тогда для каждой задачи $w \in W(M)$ можно построить соответствующую ей задачу $v \in W_{Graph}$. В силу $P|P-equal|P-edge$ сводимости количество вершин и дуг в соответствующей потоковой задаче v полиномиально зависит от размера задачи w. При этом согласно определению 2 пропускные способности дуг в задаче v определяются через целочисленные свободные коэффициенты двусторонних ограничений задачи w и также являются целочисленными.

Задача v является полиномиально разрешимой (см. [8]), так как является частным случаем полиномиально разрешимой задачи линейного программирования (здесь также можно применить специальные полиномиальные алгоритмы решения потоковых задач, [22, 23]).

Как известно, матрица системы ограничений задачи v является абсолютно унимодулярной [31]. Пропускные способности дуг в задаче v целочисленные. Отсюда найденное за полиномиальное время решение задачи v (в случае ее совместности) будет целочисленным. Тогда согласно определению 2 построенное за полиномиальное время решение задачи w также будет являться целочисленным. Следовательно найденное решение также будет являться решением задачи w_Z. Таким образом, любая из задач класса W_Z может быть решена за полиномиальное время. Теорема доказана.

Доказательство следствия 1. Пусть класс задач W_Z является NP-трудным и класс W является $P|P-equal|P-edge$ сводимым к классу W_{Graph}. Тогда согласно теореме 1 класс W_Z полиномиально разрешим. Если NP-трудный класс оптимизационных задач W_Z разрешим за полиномиальное время, то отсюда согласно концепции NP-трудности (см., например, [17]) следует, что $\mathrm{P} = \mathrm{NP}$. Следствие доказано.

Доказательство леммы 1. Пусть выполняются условия леммы. Рассмотрим задачу $w' = (A', b'^{-}, b'^{+}, c') \in W(M')$. Так как $M' \subseteq M$, то найдется задача $w = (A, b^{-}, b^{+}, c) \in W(M)$, что

— $col(A) = col(A')$;

— многоиндексные переменные задачи w совпадают с многоиндексными переменными задачи w', тогда, не уменьшая общности, можно считать, что столбцы матриц A и A' с одинаковыми номерами связаны с одними и теми же многоиндексными переменными задач w и w';

— задача w содержит все ограничения задачи w', тогда, не уменьшая общности, можно считать, что $A_{ij} = A'_{ij}$, $b_i^- = b_i'^-$, $b_i^+ = b_i'^+$, $i = \overline{1, row(A')}$, $j = \overline{1, col(A')}$;

— левые и правые свободные коэффициенты ограничений задачи w, которые не входят в систему ограничений задачи w', определяются следующим образом: $b_i^- = 0$, $b_i^+ = \sum\limits_{k=1}^{row(A')} b_k'^+$, $i = \overline{row(A') + 1, row(A)}$.

— $c = c'$.

Так как класс $W(M)$ является $P|P-equal|P-edge$ сводимым к классу W_{Graph}, то согласно определению 2 существует задача $v = v(G; l_{ij}, u_{ij}, e_{ij}, (i, j) \in A_G) \in W_{Graph}$, соответствующая задаче w. И при этом найдутся функции $\alpha : \{1, 2, \ldots, row(A)\} \to \to A_G$, $\beta : \{1, 2, \ldots, col(A)\} \to A_G$, удовлетворяющие требования из определения 2. Несложно увидеть, что задача $v \in W_{Graph}$ также будет являться задачей, соответствующей задаче w'. При этом необходимые функции $\alpha' : \{1, 2, \ldots, row(A')\} \to A_G$ и $\beta' : \{1, 2, \ldots, col(A')\} \to A_G$ определяются следующим образом: $\alpha'(i) = \alpha(i)$, $i = = \overline{1, row(A')}$, $\beta'(i) = \beta(i)$, $i = \overline{1, col(A')}$. Отсюда согласно определению 2 класс $W(M')$ является $t_1|t_2 - equal|t_3 - edge$ сводимым к классу W_{Graph}, где t_1, t_2, t_3 – полиномиальные от размера индивидуальной задачи w функции.

Заметим, что функции t_1, t_2, t_3, используемые при сведении задачи w' к задаче v, являются полиномиальными от размера индивидуальной задачи w, так как они определяются функциями, используемыми при сведении задачи w к задаче v. Далее покажем, что данные функции также можно считать полиномиальными от размера индивидуальной задачи w'.

Существует набор значений $n_l \in N$, $n_l \geq 2$, $l \in N(s)$, что $A \in D(M, n_1, \ldots, n_s)$, $A' \in D(M', n_1, \ldots, n_s)$. Количество переменных в задачах w и w' равно $col(A) = = col(A') = n_1 \ldots n_s$. А число ограничений в задачах w и w', равное $row(A)$ и $row(A')$ соответственно, ограничено сверху величиной $row(D(2^{N(s)}, n_1, \ldots, n_s))$. При этом

$$row\left(D(2^{N(s)}, n_1, \ldots, n_s)\right) = \sum_{i=0}^{s} \sum_{\{j_1, \ldots, j_i\} \in 2^{N(s)}} n_{j_1} \ldots n_{j_s} \leq$$

$$\leq \sum_{i=0}^{s} \sum_{\{j_1, \ldots, j_i\} \in 2^{N(s)}} n_1 \ldots n_s = n_1 \ldots n_s \sum_{i=0}^{s} C_i^s = \quad n_1 \ldots n_s 2^s \leq (n_1 \ldots n_s)^2.$$

Таким образом,

$$n_1 \ldots n_s \leq row(A) col(A) \leq (n_1 \ldots n_s)^3,$$
$$n_1 \ldots n_s \leq row(A') col(A') \leq (n_1 \ldots n_s)^3.$$

Отсюда, если h и h' являются размерами индивидуальных задач w и w' соответственно, то справедливо $h = O(h'^3)$. Тогда t_1, t_2, t_3 являются полиномиальными от размера индивидуальной задачи w' функциями. И, следовательно, класс $W(M')$ является $P|P - equal|P - edge$ сводимым к классу W_{Graph}. Лемма доказана.

Доказательство леммы 2. Доказательство от противного. Пусть $W(M)$ не является $P|P-equal|P-edge$ сводимым к классу W_{Graph} и найдется множество M', такое что $M \subseteq M' \subseteq 2^{N(s)}$ и $W(M')$ является $P|P - equal|P - edge$ сводимым к классу W_{Graph}. Тогда согласно лемме 1 класс $W(M)$ является $P|P - equal|P - edge$

сводимым к классу W_{Graph}. Получаем противоречие, предположение неверно. Лемма доказана.

Доказательство леммы 3. Пусть выполняются условия леммы. Если $\varnothing \in M$, то $M \cup \{\varnothing\} = M$ и лемма доказана. Далее, пусть $\varnothing \notin M$. Рассмотрим задачу $w' = w(A', b'^-, b'^+, c') \in W(M \cup \{\varnothing\})$. Так как $M \subseteq M \cup \{\varnothing\}$, то найдется задача $w = w(A, b^-, b^+, c) \in W(M)$, что

— $col(A) = col(A')$, $\quad row(A) + col(A') = row(A')$;
— многоиндексные переменные задачи w совпадают с многоиндексными переменными задачи w', тогда, не уменьшая общности, можно считать, что столбцы матриц A, A' с одинаковыми номерами связаны с одними и теми же многоиндексными переменными задач w и w';
— задача w' содержит все ограничения задачи w, тогда, не уменьшая общности, можно считать, что $A_{ij} = A'_{ij}$, $b_i^- = b_i'^-$, $b_i^+ = b_i'^+$, $i = \overline{1, row(A)}$, $j = \overline{1, col(A)}$;
— $c = c'$.

При этом, не уменьшая общности, будем считать, что

— $A'_{row(A)+i,i} = 1$, $\quad i = \overline{1, col(A')}$,
— $A'_{row(A)+i,j} = 0$, $\quad j \in \overline{1, col(A')} \backslash \{i\}$, $\quad i = \overline{1, col(A')}$.

Другими словами, ограничения задачи w', определяемые элементом $\varnothing \in M \cup \{\varnothing\}$, представляющие собой двусторонние ограничения на переменные задачи w', задаются нижними строками матрицы A'.

Так как $W(M)$ является $P|P - equal|P - edge$ сводимым к классу W_{Graph}, то согласно определению 2 существует задача $v = v(G; l_{ij}, u_{ij}, e_{ij}, (i,j) \in A_G) \in W_{Graph}$, соответствующая задаче w. И при этом существует пара функций α, β, удовлетворяющих условиям определения 2. Далее опишем схему построения задачи $v' \in \in W_{Graph}$, соответствующей задаче w'. Задача w' отличается от задачи w лишь наличием двусторонних ограничений на переменные. И при этом функция β определяет дуги задачи v, соответствующие переменным исходной задачи. Таким образом, каждую из таких дуг можно заменить на пару последовательных дуг, первая из которых будет соответствовать переменной задаче, а вторая – двустороннему ограничению на эту переменную. Тогда для построения $v' = v(G'; l'_{ij}, u'_{ij}, e'_{ij}, (i,j) \in A_{G'})$ модифицируем задачу v следующим образом. Пусть изначально $G' = G$. Для каждой из дуг (u,v), таких что $\beta(i) = (u,v)$, преобразуем граф G': $V_{G'} := V_{G'} \cup \{p_i\}$, $A_{G'} := := A_{G'} \backslash \{(u,v)\} \cup \{(u,p_i), (p_i,v)\}$, где p_i – новая вершина, $i = \overline{1, col(A)}$. Определим функции $\alpha' : \{1, 2, \ldots, row(A')\} \to A_{G'}$, $\beta' : \{1, 2, \ldots, col(A')\} \to A_{G'}$ как

$$\alpha'(i) = \begin{cases} \alpha(i), \text{ если } \alpha(i) \neq \beta(j), \text{ для всех } j = \overline{1, col(A)} \\ (u, p_j), \text{ если существует } j \in \overline{1, col(A)}, \\ \qquad\qquad \text{что } \alpha(i) = \beta(j) = (u,v) \end{cases}, \qquad i = \overline{1, row(A)};$$

$$\alpha'(row(A) + i) = (p_i, v), \quad \text{где} \quad \beta(i) = (u,v), \quad i = \overline{1, col(A')};$$

$$\beta'(i) = (u, p_i), \quad \text{где} \quad \beta(i) = (u,v), \quad i = \overline{1, col(A')}.$$

Построенные функции α', β' и граф G' определяют задачу v', соответствующую задаче w'. Отсюда класс $W(M \cup \{\varnothing\})$ является $P|P - equal|P - edge$ сводимым к классу W_{Graph}. Лемма доказана.

Доказательство леммы 3. При $s \leq 2$ произвольное множество $M \subseteq 2^{N(s)}$ является 2-вложенным и согласно теореме 2 класс $W(M)$ является $L|L - equal|L - - edge$ сводимым к классу W_{Graph} и, следовательно, является $P|P - equal|P - edge$ сводимым к классу W_{Graph}.

Пусть $s = 3$. Если множество M является 2-вложенным, то согласно теореме 2 класс $W(M)$ является $L|L-equal|L-edge$ сводимым к классу W_{Graph}, а следовательно, является $P|P-equal|P-edge$ сводимым к классу W_{Graph}. Далее, пусть множество M не является 2-вложенным. Тогда выполняется, по крайней мере, одно из двух условий: $\{\{1\},\{2\},\{3\}\} \subseteq M$ или $\{\{1,2\},\{1,3\},\{2,3\}\} \subseteq M$. Предположим, что класс $W(M)$ является $P|P-equal|P-edge$ сводимым к классу W_{Graph}. Отсюда по лемме 1 класс $W(\{\{1\},\{2\},\{3\}\})$ или класс $W(\{\{1,2\},\{1,3\},\{2,3\}\})$ является $P|P-equal|P-$ $-edge$ сводимым к классу W_{Graph}. Тогда по лемме 3 класс $W(\{\varnothing,\{\{1\},\{2\},\{3\}\})$ или класс $W(\{\varnothing,\{1,2\},\{1,3\},\{2,3\}\})$ является $P|P-equal|P-edge$ сводимым к классу W_{Graph}. Следовательно, по теореме 1, по крайней мере, один из классов задач целочисленного линейного программирования $W_Z(\{\varnothing,\{1\},\{2\},\{3\}\})$ или $W_Z(\{\varnothing,\{1,2\},\{1,3\},\{2,3\}\})$ является разрешимым за полиномиальное время. Однако классы задач $W_Z(\{\varnothing,\{1\},\{2\},\{3\}\})$ и $W_Z(\{\varnothing,\{1,2\},\{1,3\},\{2,3\}\})$ являются NP-трудными, так как включают в себя как частный случай планарную трехиндексную задачу о назначении и аксиальную трехиндексную задачу о назначении соответственно, которые, как известно (см., например, [29]), являются NP-трудными. Отсюда, если класс $W(M)$ является $P|P-equal|P-edge$ сводимым к классу W_{Graph}, то P = NP. Теорема доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Афраймович Л.Г., Прилуцкий М.Х.* Многоиндексные задачи распределения ресурсов в иерархических системах // АиТ. 2006. № 6. С. 194–205.
2. *Афраймович Л.Г., Прилуцкий М.Х.* Многопродуктовые потоки в древовидных сетях // Изв. РАН. Теория и системы управления. 2008. № 2. С. 57–63.
3. *Прилуцкий М.Х.* Многокритериальные многоиндексные задачи объемно-календарного планирования // Изв. РАН. Теория и системы управления. 2007. № 1. С. 78–82.
4. *Прилуцкий М.Х.* Многокритериальное распределение однородного ресурса в иерархических системах // АиТ. 1996. № 2. С. 139–146.
5. *Pusztaszeri J., Rensing P., Liebling T.* Tracking elementary particles near their primary vertex: A combinatorial approach // J. Global Optim. 1996. V. 9. N. 1. P. 41–64.
6. *Poore A.B.* Multidimensional assignment formulation of data association problems arising from multitarget and multisensor tracking // Comput. Optim. Appl. 1994. V. 3. N. 1. P. 27–57.
7. *Схрейвер А.* Теория линейного и целочисленного программирования: в 2 т. М.: Мир, 1991.
8. *Пападимитриу Х., Стайглиц К.* Комбинаторная оптимизация. Алгоритмы и сложность. М.: Мир, 1985.
9. *Гейл Д.* Теория линейных экономических моделей. М.: Мир, 1969.
10. *Раскин Л.Г., Кириченко И.О.* Многоиндексные задачи линейного программирования. М.: Радио и связь, 1982.
11. *Емеличев В.А., Ковалев М.М., Кравцов М.К.* Многогранники, графы, оптимизация. М.: Наука, 1981.
12. *Bandopadhyaya L., Puri M.C.* Impaired flow multi-index transportation problem with axial constraints // J. Austral. Math. Soc. Ser. B. 29(3). 1988. P. 296–309.
13. *Junginger W.* On representatives of multi-index transportation problems // Eur. J. Oper. Res. 1993. V. 66(3). P. 353–371.
14. *Верховский Б.С.* Многомерные задачи линейного программирования типа транспортной // ДАН СССР. 1963. Т. 151. № 3. С. 515–518.
15. *De Loera J.A., Kim E.D., Onn S., Santos F.* Graphs of transportation polytopes // J. Combinat. Theory. Ser. A. 2009. V. 116. No. 8. P. 1306–1325.
16. *Кравцов М.А., Крачковский А.П.* О некоторых свойствах трехиндексных транспортных многогранников // Дискретная математика. 1999. Т. 11. Вып. 3. С. 109–125.

17. *Гэри М., Джонсон Д.* Вычислительные машины и труднорешаемые задачи. М.: Мир, 1982.
18. *Frieze A.M.* Complexity of a 3-dimensional assignment problem // Eur. J. Oper. Res. 1983. V. 13(2). P. 161–164.
19. *Crama Y., Spieksma F.C.R.* Approximation algorithms for three-dimensional assignment problems with triangle inequalities // Eur. J. Oper. Res. 1992. V. 60. P. 273–279.
20. *Huang G., Lim A.* A Hybrid Genetic Algorithm for the Three-Index Assignment Problem // Eur. J. Oper. Res. 2006. V. 172. P. 249–257.
21. *Ahuja R.K., Magnati T.L., Orlin J.B.* Network flows: theory, algorithms, and applications. Prentice Hall, 1993.
22. *Galil Z., Tardos E.* An mincost flow algorithm // J. ACM. 1988. V. 35. No. 2. P. 374–386.
23. *Goldberg A.V., Rao S.* Beyond the flow decomposition barrier // J. ACM. 1998. V. 45. No. 5. P. 783–797.
24. *Литвак Б.Г., Раппопорт А.М.* Задачи линейного программирования, допускающие сетевую постановку // Экономика и мат. методы. 1970. Т. 6. Вып. 4. С. 594–604.
25. *Lin Y.* A recognition problem in converting linear programming to network flow models // Appl. Math. A J. Chin. Univer. 1993. V. 8. No. 1. P. 76–85.
26. *Ковалев М.М.* Матроиды в дискретной оптимизации. М.: Едиториал УРСС, 2003.
27. *Gülpinar N., Gutin G., Mitra G. Zverovitch A.* Extracting pure network submatrices in linear programs using signed graphs // Discret. Appl. Math. 2004. V. 137. No. 3. P. 359–372.
28. *Афраймович Л.Г.* Циклическая сводимость многоиндексных систем линейных неравенств транспортного типа // Изв. РАН. Теория и системы управления. 2010. № 4. С. 83–90.
29. *Spieksma F.C.R.* Multi index assignment problems: complexity, approximation, applications, in: P.M. Pardalos, L.S. Pitsoulis (Eds.), Nonlinear Assignment Problems: Algorithms and Applications, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 2000. P. 1–11.
30. *Chen B., Potts C.N., Woeginger G.J.* A review of machine scheduling: complexity, algorithms and approximability, in: D.Z. Du, P.M. Pardalos (Eds.), Handbook of Combinatorial Optimization, Kluwer Academic Publisher, Dordrecht, 1998. P. 21–169.
31. *Гофман А.Д., Краскал Д.Б.* Целочисленные граничные точки выпуклых многогранников // Линейные неравенства и смежные вопросы. М.: ИЛ, 1959. С. 325–347.

Статья представлена к публикации членом редколлегии А.А. Лазаревым.

Поступила в редакцию 11.05.2010