Автоматика и телемеханика, № 10, 2010

© 2010 г. Л. Г. АФРАЙМОВИЧ, канд. физ.-мат. наук,
М. Х. ПРИЛУЦКИЙ, д-р техн. наук
(Нижегородский государственный университет)

МНОГОИНДЕКСНЫЕ ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО ПЛАНИРОВАНИЯ ПРОИЗВОДСТВА

Рассматриваются задачи планирования производства, формализуемые как оптимизационные задачи с многоиндексной системой ограничений транспортного типа. Такие задачи возникают, например, при формировании портфеля заказов, объемно-календарном планировании и т.д. Обсуждаются вычислительные схемы решения поставленной задачи для различных видов оптимизационных функций.

1. Введение

Вопросы автоматизации процессов планирования производственными системами в связи с интенсификацией производства в настоящее время являются актуальными. Здесь обычно различают следующие классы задач: задачи формирования портфеля заказов, задачи объемно-календарного планирования и задачи календарного планирования. Задачи календарного планирования изучаются в рамках теории расписаний и представляют собой задачи распределения ограниченных ресурсов во времени. Этим задачам в научной литературе уделялось и уделяется много внимания ([1–5]). Менее изученными являются проблемы формирования портфеля заказов и объемно-календарного планирования. Задача формирования портфеля заказов заключается в определении, какие заказы предприятие будет выполнять в планируемом периоде. Планируемым периодом в таких задачах обычно является год. Задача объемно-календарного планирования заключается в распределении производственной программы предприятия, найденной на этапе формирования портфеля заказов, по календарным подпериодам (месяцам). Такие задачи рассматривают не в общей постановке с учетом всех зависимостей и связей, как в задачах календарного планирования, а с определенной степенью идеализации. Вместо конкретных работ с их длительностями рассматриваются объемные показатели (нормо-часы, рубли, условные тонны), связанные с совокупностями работ, составляющих изделия заказов.

Задачи формирования портфеля заказов и объемно-календарного планирования будем рассматривать как задачи распределения ограниченных ресурсов в многоиндексных иерархических системах транспортного типа ([6–10]). Проблема объемного планирования ресурсов является предметом исследования многих работ (см., например, [11–15]). Важным отличием данной работы является то, что задачи рассматриваемого класса формализуются как оптимизационные задачи с многоиндексной системой ограничений транспортного типа. В работе приводятся постановки задач, возникающих при формирования портфеля заказов и объемно-календарного планировании. Обсуждаются вычислительные схемы решения соответствующих многоиндексных оптимизационных задач.

2. Постановки задач

2.1. Задача формирования портфеля заказов

Необходимо сформировать портфель заказов для предприятия, удовлетворяющий некоторым заданным обобщенным оценкам производительности предприятия и трудоемкости заказов. Пусть I – множество подразделений предприятия, J – множество заказов, K – множество изделий. Обозначим через A_i «мощность» подразделения i, т.е. объем работ, который подразделение i может выполнить в планируемом периоде; B_k – объем работ, который планируется к выпуску предприятием в планируемом периоде по изделию k; C_{ik} – объем работ, который планируется к выпуску в i-м подразделении по k-му заказу; D_{jk} – объем работ, который планируется к выпуску по k-му изделию j-го заказа; e_{ijk} – прибыль, которую предприятие планирует получить за изготовление единицы объема работ, выполненного в подразделении i по изделию k заказа j, $i \in I$, $j \in J$, $k \in K$.

Задача формирования портфеля заказов заключается в определении величин x_{ijk} – объема работ, который будет выполнен в подразделении i по изделию k заказа j, $i \in I$, $j \in J$, $k \in K$, для которых выполняются ограничения:

$$(1) \qquad \sum_{j\in J}\sum_{k\in K} x_{ijk} \leqslant A_i, \quad i \in I;$$

$$(2) \qquad \sum_{i\in I}\sum_{j\in J} x_{ijk} \geqslant B_k, \quad k \in K;$$

$$(3) \qquad \sum_{j\in J} x_{ijk} \leqslant C_{ik}, \quad i \in I, \quad k \in K;$$

$$(4) \qquad \sum_{i\in I} x_{ijk} \geqslant D_{jk}, \quad j \in J, \quad k \in K;$$

$$(5) \qquad x_{ijk} \geqslant 0, \quad i \in I, \quad j \in J, \quad k \in K;$$

и принимает максимальное значение критерий

$$(6) \qquad \sum_{i\in I}\sum_{j\in J}\sum_{k\in K} e_{ijk} x_{ijk} \to \max,$$

характеризующий суммарную прибыль, которую получит предприятие. Введенные ограничения означают:

(1) – объем работ, выполняемый по всем заказам и изделиям в i-м подразделении не должен превышать «мощности» этого подразделения;

(2) – запланированный объем работ по k-му изделию должен быть выполнен в подразделениях предприятия в течение всего периода планирования;

(3) – объем запланированных работ не должен превышать объема работ, который будет выполнен в i-м подразделении по k-му изделию;

(4) – запланированный объем работ по k-му изделию j-го заказа должен быть выполнен в подразделениях предприятия в течение всего периода планирования;

(5) – естественные условия на переменные.

Для совместности системы ограничений (1)–(5) необходимо выполнение условий: $\sum_{i\in I} C_{ik} \geqslant B_k$, $\sum_{i\in I} C_{ik} \geqslant \sum_{j\in J} D_{jk}$, $k \in K$. Из содержания задачи, так как предприятие не заинтересовано в выпуске внеплановой продукции, следует, что исходные величины связаны между собой естественными условиями: $\sum_{i\in I} C_{ik} = B_k$, $\sum_{i\in I} C_{ik} = \sum_{j\in J} D_{jk}$, $k \in K$, при которых ограничения (2), (3), (4) должны выполняться как равенства. В такой постановке система ограничений (1)–(5) может быть несовместной из-за невыполнения ограничений (1) – мощностей подразделений может быть недостаточно для выполнения заказов, которые предприятие хотело бы включить в план производства. Если мощности подразделений могут быть увеличены, то естественной является постановка следующей задачи.

Обозначим через q_i – затраты, связанные с увеличением мощности i-го подразделения на единицу; y_i – величина, на которую будет увеличена мощность i-го подразделения; Q_i – величина, на которую можно увеличить мощность i-го подразделения, $i \in I$.

Тогда задача формирования портфеля заказов преобразуется в задачу с ограничениями исходной задачи (2)–(5), новыми ограничениями

$$\sum_{j \in J} \sum_{k \in K} x_{ijk} \leqslant A_i + y_i, \quad i \in I; \tag{7}$$

$$0 \leqslant y_i \leqslant Q_i, \quad i \in I; \tag{8}$$

и критерием

$$\sum_{i \in I} q_i y_i \to \min\,, \tag{9}$$

характеризующим суммарные затраты предприятия на увеличение мощностей. Введенные ограничения означают:

(7) – объем работ, выполняемый по всем заказам и изделиям в i-м подразделении не должен превышать мощности подразделения с учетом ее возможного увеличения;

(8) – увеличение мощностей подразделения i не должно превышать максимально возможного значения.

2.2. Задача объемно-календарного планирования

Задача объемно-календарного планирования заключается в распределении найденной на этапе формирования портфеля заказов производственной программы по календарным подпериодам. Кроме введенных для предыдущей задачи множеств I, J, K, введем множество $T = \{1, 2, \ldots, T_0\}$ – номеров тактов планирования и величины t_j^-, t_j^+ – соответственно номер такта начала (начальный срок) и окончания (директивный срок) выполнения работ по заказу j, $t_j^-, t_j^+ \in T$, $j \in J$. Исходные параметры задачи объемно-календарного планирования будут включать в себя соответственно: A_{it}, B_{ijt}, C_{ikt}, D_{ijk}, E_{ijkt}, $i \in I$, $j \in J$, $k \in K$, $t \in T$, – мощности подразделений предприятия по тактам планирования; объемы работ, которые должны быть выполнены по заказам в подразделениях по тактам планирования; объемы работ, которые должны быть выполнены по изделиям в подразделениях по тактам планирования; объемы работ по заказам и изделиям, которые должны быть выполнены в подразделениях предприятия; объемы работ, которые должны быть выполнены в подразделениях по тактам планирования по заказа и изделиям. Между введенными параметрами и решением задачи формирования портфеля заказов существует естественная взаимозависимость. Пусть x_{ijk}^0, $i \in I$, $j \in J$, $k \in K$, – решение задачи формирования портфеля заказов. Тогда $\sum\limits_{t \in T} B_{ijt} = \sum\limits_{k \in K} x_{ijk}^0$, $\sum\limits_{t \in T} C_{ikt} = \sum\limits_{j \in J} x_{ijk}^0$, $D_{ijk} = x_{ijk}^0$, $i \in I$, $j \in J$, $k \in K$.

Проблема распределения программы предприятия по календарным подпериодам заключается в определении величин z_{ijkt} – объема работ, который будет выполнен в подразделении i по изделию k заказа j в такт t, $i \in I$, $j \in J$, $k \in K$, $t \in T$, для которых выполняются ограничения:

$$(10) \qquad \sum_{j \in J} \sum_{k \in K} z_{ijkt} \leqslant A_{it}, \quad i \in I, \quad t \in T;$$

$$(11) \qquad \sum_{k \in K} z_{ijkt} \geqslant B_{ijt}, \quad i \in I, \quad j \in J, \quad t \in T;$$

$$(12) \qquad \sum_{j \in J} z_{ijkt} \geqslant C_{ikt}, \quad i \in I, \quad k \in K, \quad t \in T;$$

$$(13) \qquad \sum_{t \in T} z_{ijkt} \geqslant D_{ijk}, \quad i \in I, \quad j \in J, \quad k \in K;$$

$$(14) \qquad z_{ijkt} \leqslant E_{ijkt}, \quad i \in I, \quad j \in J, \quad k \in K, \quad t \in T;$$

$$(15) \qquad z_{ijkt} = 0, \quad t \in T \setminus \left\{t_j^-, t_j^- + 1, \ldots, t_j^+\right\}, \quad i \in I, \quad j \in J, \quad k \in K;$$

$$(16) \qquad z_{ijkt} \geqslant 0, \quad i \in I, \quad j \in J, \quad k \in K, \quad t \in T.$$

Введенные ограничения означают:

(10) – объем работ, выполняемый по всем заказам и изделиям в i-м подразделении не должен превышать «мощности» этого подразделения в такт t;

(11) – запланированный в i-м подразделении в такт t объем работ по j-му заказу должен быть выполнен;

(12) – запланированный в i-м подразделении в такт t объем работ по k-му изделию должен быть выполнен;

(13) – запланированный в i-м подразделении объем работ по k-му изделию j-го заказа должен быть выполнен;

(14) – ограничения на выпуск внеплановой продукции;

(15) – условия соблюдения начальных и директивных сроков для заказов;

(16) – естественные условия на переменные.

Среди всех допустимых планов будем искать такие планы, которые удовлетворяют условиям эффективного функционирования производственной системы. Для задачи объемно-календарного планирования эффективность функционирования зависит от нескольких факторов. Как показал опыт решения таких задач ([7, 9]), формализация этих факторов в виде непрерывных функций для пользователей затруднительна. Пользователю проще оценить показатели искомого плана, указав границы для величин отклонений, в которых эти величины являются «отличными», «очень хорошими», «хорошими», «удовлетворительными» и др. Тогда формализуемые критерии задачи объемно-календарного планирования могут быть представлены в виде кусочно-постоянных функций, разбивающих множество величин отклонений по каждому критерию на области «качества» отклонений. Такими функциями могут быть функции, область значений которых задается множеством целых неотрицательных чисел от 0 до p (0 – «отлично», 1 – «очень хорошо» и т.д.).

Заданы сегменты возможных значений некоторых показателей плана, которые определяют эффективность функционирования производственной системы. Показателями плана могут быть любые показатели, определяемые ограничениями (10)–(16). Пусть эффективность функционирования системы связана с использованием мощностей подразделений по тактам планирования, определяемых множеством $H \subseteq I \times T$. Тогда такими сегментами будут являться $[0, A_{it}]$, $(i,t) \in H$. Далее для каждого из показателей плана, связанного с сегментом $[0, A_{it}]$, зададим совокупность из $p+1$ вложенных друг в друга сегментов $S_{it}^{(l)}$, $l = \overline{0,p}$, что $S_{it}^{(l)} \subseteq S_{it}^{(l+1)}$, $l = \overline{0, p-1}$, $S_{it}^{(p)} = [0, A_{it}]$, $(i,t) \in H$. С каждым из таких показателей будем связывать функцию предпочтения $\chi_{it}(w, S_{it}^{(0)}, S_{it}^{(1)}, \ldots, S_{it}^{(p)})$, принимающую значение r, если $w \in S_{it}^{(r)}$ и $w \notin S_{it}^{(r-1)}$, $r = \overline{0,p}$, $(i,t) \in H$. Тогда будем рассматривать задачу поиска допустимого плана z_{ijkt}, $i \in I$, $j \in J$, $k \in K$, $t \in T$, удовлетворяющего системе ограничений (10)–(16), и минимизирующего функции предпочтения для выбранных показателей:

$$\chi_{it}\left(\sum_{k\in K}\sum_{j\in J} z_{ijkt}, S_{it}^{(0)}, S_{it}^{(1)}, \ldots, S_{it}^{(p)}\right) \to \min, \quad (i,t) \in H. \tag{17}$$

Поставленная задача (10)–(17) является задачей многокритериальной оптимизации. Предполагая, что выбранные показатели плана упорядочены с точки зрения их значимости при определении эффективности функционирования предприятия, в качестве схемы компромисса будем рассматривать лексикографическое упорядочивание частных критериев оптимальности.

Для формализации схемы компромисса рассматриваемой многокритериальной задачи введем некоторые вспомогательные величины. Пусть элементы множества H упорядочены исходя из приоритетов выбранных показателей и $H = \{(i_1,t_1), (i_2,t_2), \ldots, (i_{|H|}, t_{|H|})\}$. Пусть $a, b \in N$. Введем множество $V_{a,b} = \{(v_1, v_2, \ldots, v_b) | \, v_l = \overline{1,a}, \, l = \overline{1,b}\}$. Тогда через $V_{a,b}$ будем обозначать (как и в [6, 9]) множество вершин a-ичного b-мерного куба. Далее введем $(p+1)$-ичный $|H|$-мерный куб, на котором определим порядок Π. Каждой вершине куба $\vec{v} \in V_{(p+1),|H|}$ поставим в соответствие систему $\Omega(\vec{v})$. Система $\Omega(\vec{v})$ содержит независящие от вершины куба ограничения (10)–(16) и ограничения, зависящие от вершины следующим образом: если $v_l = s$, то в систему добавляется ограничение $\sum\limits_{k\in K}\sum\limits_{j\in J} z_{i_l j k t_l} \in S_{i_l t_l}^{(s)}$, $l = \overline{1,|H|}$. На множестве вершин куба зададим двузначную функцию $g(\vec{v})$, принимающую значение единица, если система $\Omega(\vec{v})$ совместна, и ноль в противном случае. Через $V = \{\vec{v} \in V_{(p+1),|H|} | g(\vec{v}) = 1\}$ обозначим множество вершин $(p+1)$-ичного $|H|$-мерного куба, для которых соответствующая функция g принимает значение, равное единице.

В качестве порядка Π рассмотрим лексикографическое отношение порядка: $\vec{v}^1 \Pi \vec{v}^2$ тогда и только тогда, когда для некоторого l, $l = \overline{1,|H|}$, $v_l^1 < v_l^2$ и одновременно $v_r^1 = v_l^2$ для $r = \overline{1,l-1}$.

Тогда будем рассматривать следующую задачу поиска оптимальной вершины куба $\vec{v}^0$:

$$\vec{v}^0 \in V, \tag{18}$$

$$\vec{v}^0 \Pi \vec{v}, \quad \vec{v} \in V. \tag{19}$$

Оптимальная вершина $\vec{v}^0$, являющаяся решением задачи (18), (19), определяет оптимальное решение многокритериальной задачи (10)–(17) при лексикографической схеме компромисса.

Замечание. При постановке задачи (18), (19) показателями эффективности функционирования производственной системы могут быть условия, определяемые не одной группой ограничений, а несколькими группами. Причем возможно учитывать любые подмножества ограничений выбранных групп.

3. Алгоритмы решения

Поставленные в разделе 2 задачи связаны с исследованием оптимизационных задач, система ограничений которых представляет собой многоиндексную систему линейных неравенств транспортного типа. Для описания многоиндексных задач воспользуемся следующей формализацией. Пусть заданно множество индексов $N(s) = \{i_1, i_2, \ldots, i_s\}$ и множество $M \subseteq 2^{N(s)}$. Тогда через $W(M)$ будем обозначать многоиндексную задачу линейного программирования транспортного типа с множеством индексов $N(s)$ и системой ограничений, состоящей, для каждого $f \in M$, из ограничений на подсуммы, в которых суммирование происходит по всем индексам множества f при фиксированных наборах значений индексов из $N(s) \setminus f$. Для удобства через $E_{N(s)}$ будем обозначать множество всех возможных значений s-индексных наборов индексов множества $N(s)$; через $D(M)$ будем обозначать систему ограничений задачи $W(M)$.

В общем случае для решения задачи $W(M)$ могут быть использованы лишь универсальные методы решения задач линейного программирования. Однако специфика поставленной задачи (линейные ограничения транспортного типа) позволила для частного класса рассматриваемых задач предложить более эффективные алгоритмы их решения, основанные на сводимости к потоковым алгоритмам [8]. Приведем далее результаты сводимости задачи $W(M)$ к потоковым алгоритмам, полученные в [8].

Определение 1. *Множество M, $M \subseteq 2^{N(s)}$, называется k-вложенным, если существует разбиение множества M на k подмножеств $M_i = \{f_1^{(i)}, f_2^{(i)}, \ldots, f_{m_i}^{(i)}\}$, $i = \overline{1, k}$, таких что $f_j^{(i)} \subseteq f_{j+1}^{(i)}$, $j = \overline{1, m_i - 1}$, $i = \overline{1, k}$.*

Теорема 1. *Для того чтобы задача $W(M)$ сводилась к задаче поиска потока минимальной стоимости, достаточно, чтобы множество M было 2-вложенным.*

Следствие 1. *Если множество M является 2-вложенным, то задача $W(M)$ (система неравенств $D(M)$) сводится к поиску потока минимальной стоимости (допустимого потока) в сети с $O(|E_{N(s)}|)$ вершинами и $O(|E_{N(s)}|)$ дугами.*

Далее, воспользовавшись известными алгоритмами поиска потока (см. [16, 17]), можно сформулировать следующий результат.

Следствие 2. *Если множество M является 2-вложенным, то существует алгоритм решения задачи $W(M)$ (системы неравенств $D(M)$), требующий $O(|E_{N(s)}|^3 \log^2 |E_{N(s)}|)$ $(O(|E_{N(s)}|^2 \log |E_{N(s)}|))$ вычислительных операций.*

Задача (1)–(6) соответствует задаче $W(M)$, где $s = 3$, $N(s) = \{i, j, k\}$, $M = \{\{j, k\}, \{i, j\}, \{j\}, \{i\}\}$, $E_{N(s)} = I \times J \times K$. Для множества M существует разбиение $M_1 = \{\{j, k\}, \{j\}\}$, $M_2 = \{\{i, j\}, \{i\}\}$, таким образом множество M является 2-вложенным. Отсюда, применив предложенный подход и воспользовавшись следствием 2, можно построить алгоритм решения задачи формирования портфеля заказов (1)–(6), требующий $O(|I \times J \times K|^3 \log^2 |I \times J \times K|)$ вычислительных операций; и алгоритм исследования совместности системы (1)–(5), требующий $O(|I \times J \times K|^2 \log |I \times J \times K|)$ вычислительных операций.

Пусть система ограничений $D(M)$ несовместна. Известно подмножество двусторонних неравенств системы, для которых разрешены изменения левых и (или) правых границ. Ограничения, для которых разрешены изменения границ, будем называть «желательными», иначе – «жесткими». Заданы штрафы за нарушения границ желательных ограничений. Задача заключается в определении значений неизвестных, удовлетворяющих жестким ограничениям и минимизирующих суммарный штраф за нарушения желательных ограничений. Данную задачу будем обозначать через $L(M)$.

Согласно следствию 1 в случае, когда множество M является 2-вложенным, исследование системы ограничений $D(M)$ сводится к поиску допустимого потока в сети. Таким образом, задача $L(M)$ исследования несовместной системы $D(M)$ сводится к исследованию несовместной сетевой модели. В [18] было доказано, что задача поиска потока в несовместной сети с n вершинами и m дугами сводится к поиску потока минимальной стоимости в сети с $O(n+m)$ вершинами и $O(m)$ дугами. Тогда, воспользовавшись следствием 1 и применяя известные алгоритмы поиска потока минимальной стоимости [16, 17], можно сформулировать следующие результаты.

Следствие 3. *Если множество M является 2-вложенным, то задача $L(M)$ сводится к поиску потока минимальной стоимости в сети с $O(|E_{N(s)}|)$ вершинами и $O(|E_{N(s)}|)$ дугами.*

Следствие 4. *Если множество M является 2-вложенным, то существует алгоритм решения задачи $L(M)$, требующий $O(|E_{N(s)}|^3 \log^2 |E_{N(s)}|)$ вычислительных операций.*

Задача (2)–(5), (7)–(9) соответствует задаче $L(M)$, где $s = 3$, $N(s) = \{i, j, k\}$, $M = \{\{j, k\}, \{i, j\}, \{j\}, \{i\}\}$, $E_{N(s)} = I \times J \times K$ и множество M, как уже было показано, является 2-вложенным. Отсюда, применив предложенный подход и воспользовавшись следствием 4, можно построить алгоритм решения задачи формирования портфеля заказов (2)–(5), (7)–(9), требующий $O(|I \times J \times K|^3 \log^2 |I \times J \times K|)$ вычислительных операций.

В [9] был разработан алгоритм решения задачи поиска оптимальной вершины многомерного многозначного куба. Было доказано, что поиск оптимальной вершины $(p+1)$-ичного $|H|$-мерного куба сводится к проверке на совместность порядка $|H| \log_2(p+1)$ систем вида $\Omega(\vec{v})$. При решении задачи (18), (19), возникающей при объемно-календарном планировании, соответствующая система $\Omega(\vec{v})$ является системой вида $D(M)$, где $s = 4$, $N(s) = \{i, j, k, t\}$, $M = \{\{j, k\}, \{k\}, \{j\}, \{t\}, \emptyset\}$. Множество M в данном случае не является 2-вложенным. Для исследования совместности соответствующей системы $D(M)$ можно воспользоваться предложенным в [9] модифицированным методом ортогональных проекций Агмона-Моцкина [19, 20]. Метод ортогональных проекций Агмона-Моцкина является итерационным алгоритмом. На каждом шаге алгоритма определяется ограничение, которому не удовлетворяет текущее решение. Далее текущее решение проектируется на гиперплоскость, связанную с нарушенным ограничением, и происходит переход на следующий шаг. В [19, 20] показана сходимость данного метода.

В частном случае, когда система ограничений задачи объемно-календарного планирования задается условиями (10), (11), (13)–(16), для решения задачи (18), (19) соответствующая система $\Omega(\vec{v})$ является системой вида $D(M)$, где $s = 4$, $N(s) = \{i, j, k, t\}$, $M = \{\{j, k\}, \{k\}, \{t\}, \emptyset\}$, $E_{N(s)} = I \times J \times K \times T$. Для множества M существует разбиение $M_1 = \{\{j, k\}, \{k\}, \emptyset\}$, $M_2 = \{\{t\}\}$, таким образом множество M является 2-вложенным. Тогда согласно следствию 2 можно построить алгоритм исследования совместности соответствующей системы $\Omega(\vec{v})$, требующий $O(|I \times J \times K \times T|^2 \log |I \times J \times K \times T|)$ вычислительных операций. Отсюда предложенный метод решения задачи поиска оптимальной вершины куба будет требовать $O(|I \times J \times K \times T|^2 \log |I \times J \times K \times T| |H| \log p)$ вычислительных операций.

4. Заключение

Предложенный подход к исследованию задач оптимального планирования производственными системами позволяет для широкого класса практически важных прикладных задач применять процедуры их сведения к хорошо разработанным эффективным потоковым алгоритмам. Созданный на основе полученных в данной работе результатов программный продукт был апробирован при решении задач объемно-календарного планирования для предприятий с единичным и мелкосерийным характером производства (Инструментальное производство ФГУП «ФНПЦ НИИИС им. Ю.Е. Седакова», количество работ – до 25000, количество подразделений – до 100, горизонт планирования – 1 год, такт планирования – месяц, время решения – до 5 минут, [7]) и нефтеперерабатывающих предприятий (Сургутский завод стабилизации конденсата ООО «Сургутгазпром», количество заказов – до 100, количество подразделений до – 500, количество тактов – до 30, время решения – до 10 минут, [10]).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Танаев В.С., Шкурба В.В.* Введение в теорию расписаний. М.: Наука, 1975.
2. *Танаев В.С., Гордон В.С., Шафранский Я.М.* Теория расписаний. Одностадийные системы. М.: Наука, 1984.
3. *Танаев В.С., Сотсков Ю.Н., Струсевич В.А.* Теория расписаний. Многостадийные системы. М.: Наука, 1989.
4. *Brucker P.* Scheduling Algorithms. New York: Springer-Verlag Inc., 1998.
5. *Pinedo M.* Scheduling: theory, algorithms, and systems. Prentice-Hall, 2008.
6. *Прилуцкий М.Х.* Многокритериальное распределение однородного ресурса в иерархических системах // АиТ. 1996. № 2. С. 24–29.
7. *Прилуцкий М.Х., Власов С.Е.* Многокритериальные задачи объемного планирования. Лексикографические схемы // Информ. технологии. 2005. № 7. С. 61–66.
8. *Афраймович Л.Г., Прилуцкий М.Х.* Многоиндексные задачи распределения ресурсов в иерархических системах // АиТ. 2006. № 6. С. 194–205.
9. *Прилуцкий М.Х.* Многокритериальные многоиндексные задачи объемно-календарного планирования // Изв. РАН. Теория и системы управления. 2007. № 1. С. 78–82.
10. *Прилуцкий М.Х., Костюков В.Е.* Оптимизационные задачи объемно-календарного планирования для нефтеперерабатывающих предприятий // Системы управления и информ. технологии. 2007. № 2.1(28). С. 188–192.
11. *Alcaraz J., Maroto C.* A robust genetic algorithm for resource allocation in project scheduling // Ann. Oper. Res. 2001. V. 102. No 1–4. P. 83–109.
12. *Hunsaker B., Kleywegt A.J, Savelsbergh M.W.P., Tovey C.A.* Optimal online algorithms for minimax resource scheduling // SIAM J. Discrete Math. 2003. V. 16. No 4. P. 555–590.
13. *Кочетов Ю.А., Столяр А.А.* Новые жадные эвристики для задачи календарного планирования с ограниченными ресурсами // Дискретный анализ и исследование операций. 2005. Вып. 12. № 1. С. 12–36.
14. *Еремеев А.В., Романова А.А., Servах В.В., Чаухан С.С.* Приближенное решение задачи управления поставками // Дискретный анализ и исследование операций. 2006. Вып. 13. № 3. С. 27–39.
15. *Девятерикова М.В., Колоколов А.А., Колосов А.П.* Об одном подходе к решению дискретной задачи планирования производства с интервальными данными // Тр. ин-та математики и механики. 2008. Вып. 14. № 2. С. 48–57.
16. *Galil Z., Tardos E.* An mincost flow algorithm // J. ACM. 1988. V. 35. No 2. P. 374–386.
17. *Goldberg A.V., Rao S.* Beyond the flow decomposition barrier // J. ACM. 1998. V. 45. No 5. P. 783–797.
18. *Афраймович Л.Г., Прилуцкий М.Х.* Поиск потока в несовместных транспортных сетях // Управление большими системами. Вып. 24. М.: ИПУ РАН, 2009. С. 258–280.
19. *Agmon S.* The relaxation method for linear inequalities // Canadian J. Math. 1954. V. 6. No 3. P. 382–392.
20. *Motzkin T.S., Schoenberg I.J.* The relaxation method for linear inequalities // Canadian J. Math. 1954. V. 6. No 3. P. 393–404.

Статья представлена к публикации членом редколлегии А.А. Лазаревым.

Поступила в редакцию 12.01.2010