

Управление в социально-экономических системах

PACS 89.20.Ff

© 2006 г. Л.Г. АФРАЙМОВИЧ,
М.Х. ПРИЛУЦКИЙ, д-р техн. наук
(Нижегородский государственный университет)

МНОГОИНДЕКСНЫЕ ЗАДАЧИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ РЕСУРСОВ В ИЕРАРХИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ

Задача распределения ресурсов в иерархических системах формализуется в виде многоиндексной задачи линейного программирования с ограничениями транспортного типа. Даются условия сводимости этой задачи к задаче поиска циркуляции минимальной стоимости в транспортной сети.

1. Введение

Широкий класс прикладных задач связан с распределением ограниченных ресурсов в иерархических системах [1–7]. Примерами таких задач являются: задача сбалансированного распределения нагрузки в разнородной сети [2], задача распределения работ по параллельным вычислительным машинам [3], задача распределения ресурсов в ходе ведения переговоров [4] и др. Особое место среди таких задач занимают задачи, формализация которых возможна в виде многокритериальных многоиндексных задач с линейными ограничениями транспортного типа [5–7]. Содержательно эти задачи можно описать следующим образом. Предполагается, что в системе присутствуют элементы трех типов: источники ресурсов, передающие элементы и потребители ресурсов. Элементы системы и связи между ними характеризуются ресурсными ограничениями, определяющими объемы ресурсов, которые могут циркулировать в системе. Среди элементов системы выделяются так называемые “контролируемые” элементы, которые определяют условия “эффективного” функционирования системы. Каждый из “контролируемых” элементов определяет на соответствующем ему интервале допустимого распределения ресурсов бинарные отношения, которые задаются с помощью функций предпочтения, определенных для “контролируемых” элементов. В общей постановке задача распределения ресурсов в иерархической системе заключается в определении допустимого варианта распределения ресурсов, при котором принимают экстремальные значения функции предпочтения, определенные для контролируемых элементов. Такие задачи формально представимы как многокритериальные (учет контролируемых элементов) задачи с линейными ограничениями и критериями, вид которых зависит от типа функций предпочтения. В [6] в качестве таких функций выбраны кусочно-линейные и квадратичные функции. В случае, когда функционирование системы связано с экономическими показателями, такими как суммарные затраты, суммарный доход или суммарная прибыль, в качестве функций предпочтения выбираются линейные функции. Тогда, считая, что распределение ресурсов в системе удовлетворяет условиям аддитивности и пропорциональности, в качестве схемы компромисса может

быть выбрана линейная свертка частных критериев оптимальности, определенных для “контролируемых” элементов. Тогда задача распределения ресурсов в иерархических системах формализуется как многоиндексная задача линейного программирования транспортного типа. К таким задачам относятся: транспортная задача с промежуточными пунктами [8], задача распределения мощностей каналов передачи данных провайдерами сети ИНТЕРНЕТ [5], задача объемно-календарного планирования [7].

1.1. Транспортная задача с промежуточными пунктами

Имеются пункты производства, промежуточные пункты и пункты потребления однородного продукта. Заданы максимально возможные объемы производства продукта каждым пунктом производства, объемы потребления продукции каждым пунктом потребления, ограничения на объемы перевозки продукта от каждого пункта производства до каждого промежуточного пункта, ограничения на объемы перевозки продукта от каждого промежуточного пункта до каждого пункта потребления. При известных затратах на перевозку продукции от пунктов производства через промежуточные пункты к пунктам потребления необходимо найти план перевозок, обеспечивающий минимальные затраты.

Пусть I – множество пунктов производства, J – множество промежуточных пунктов, K – множество пунктов потребления. Обозначим через A_i максимальный объем производства продукта пунктом i ; B_k – объем продукта, который необходимо доставить k -му пункту потребления; D_{jk} – максимальное количество продукта, которое может быть доставлено из j -го промежуточного пункта k -му потребителю; E_{ij} – максимальный объем продукта, который может быть доставлен из i -го пункта производства в j -й промежуточный пункт; c_{ijk} – затраты на доставку единицы продукции из i -го пункта производства через j -й промежуточный пункт k -му потребителю, $i \in I, j \in J, k \in K$. Тогда рассматриваемая задача заключается в определении таких величин x_{ijk} – количество продукта, которое будет перевезено из пункта производства i через j -й промежуточный пункт k -му потребителю, для которых выполняются ограничения:

$$\begin{aligned} \sum_{j \in J} \sum_{k \in K} x_{ijk} &\leq A_i, \quad i \in I; \\ \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} x_{ijk} &\geq B_k, \quad k \in K; \\ \sum_{i \in I} x_{ijk} &\leq D_{jk}, \quad j \in J, \quad k \in K; \\ \sum_{k \in K} x_{ijk} &\leq E_{ij}, \quad i \in I, \quad j \in J; \\ x_{ijk} &\geq 0, \quad i \in I, \quad j \in J, \quad k \in K; \end{aligned}$$

и принимает минимальное значение критерий

$$\sum_{i \in I} \sum_{j \in J} \sum_{k \in K} c_{ijk} x_{ijk},$$

характеризующий суммарные затраты на перевозку продуктов.

1.2. Задача распределения мощностей каналов передачи данных провайдерами сети ИНТЕРНЕТ

Необходимо распределять ограниченные мощности каналов передачи данных между различными узлами сети городских провайдеров. Пусть известны потреб-

ности абонентов сети в получении того или иного количества информации. Известны возможности провайдеров в предоставлении каналов той или иной мощности между различными узлами связи. С учетом этих возможностей заданы пожелания (предпочтения) абонентов и провайдеров относительно возможности передачи того или иного количества информации тому или иному абоненту или узлу. Определены условия признания эффективности того или иного распределения каналов (в зависимости от их пропускной способности). Структура сети и распределяемой в ней информации в общем случае может быть самой разнообразной. Будем рассматривать данную проблему со следующими ограничениями:

- информация распределяется от центра к абонентам через коммутационные узлы по каналам связи;
- каждый узел или абонент сети обслуживается одним или несколькими коммутационными узлами;
- количество распределяемой информации для коммутационных узлов и абонентов может быть ограничено как сверху (принципиальные ограничения возможностей провайдера), так и снизу (минимальная потребность абонентов в получаемой информации).

Нужно распределить пропускную способность каналов максимально эффективно, учитывая как потребности и предпочтения абонентов, так и возможности провайдеров.

Пусть P – множество провайдеров сети, R – множество коммутационных узлов, U – множество абонентов. Обозначим через A_i^- , A_i^+ – нижнее и верхнее ограничения суммарной мощности канала передачи данных, которую способен предоставить провайдер i ; B_j^- , B_j^+ – нижнее и верхнее ограничения суммарной мощности канала передачи данных, которую способен обработать коммутационный узел j ; C_k^- , C_k^+ – нижнее и верхнее ограничения суммарной мощности канала передачи данных, которую необходимо предоставить абоненту k ; D_{ijk}^- , D_{ijk}^+ – нижнее и верхнее ограничения мощности канала передачи данных, ведущего от провайдера i к абоненту k через коммутационный узел j ; h_i – затраты, связанные с предоставлением провайдера i связи единичной мощности; g_j – затраты, связанные с обработкой передающей станции j связи единичной мощности; q_k – доход, связанный с получением абонента k связи единичной мощности; $i \in P$, $j \in R$, $k \in U$. Тогда, предполагая, что распределение мощностей каналов связи удовлетворяет условиям аддитивности и пропорциональности, можно рассматривать задачу максимизации суммарной прибыли, которая заключается в определении таких величин x_{ijk} – мощность канала связи, предоставляемая абоненту k через коммутационный узел j провайдером i , $i \in P$, $j \in R$, $k \in U$, для которых выполняются ограничения:

$$\begin{aligned} A_i^- &\leq \sum_{j \in R} \sum_{k \in U} x_{ijk} \leq A_i^+, \quad i \in P; \\ B_j^- &\leq \sum_{i \in P} \sum_{k \in U} x_{ijk} \leq B_j^+, \quad j \in R; \\ C_k^- &\leq \sum_{i \in P} \sum_{j \in R} x_{ijk} \leq C_k^+, \quad k \in U; \\ D_{ijk}^- &\leq x_{ijk} \leq D_{ijk}^+, \quad i \in P, \quad j \in R, \quad k \in U; \end{aligned}$$

и принимает максимальное значение критерий

$$\sum_{i \in P} \sum_{j \in R} \sum_{k \in U} (q_k - h_i - g_j) x_{ijk},$$

характеризующий суммарную прибыль, которую получит система.

1.3. Задача объемно-календарного планирования

Необходимо определить на заданный период планирования программу производства в объемных показателях, удовлетворяющую некоторым заданным характеристикам. Пусть S – множество подразделений предприятия, Q – множество заказов, P – множество изделий, T – множество тактов планирования. Обозначим через A_t – общий объем работ, который должен быть выполнен по всем изделиям всех заказов всеми подразделениями в такт t ; B_j – общий объем работ, который должен быть выполнен за все такты планирования по всем изделиям всех подразделений по заказу j ; E_{it} – общий объем работ, который должен быть выполнен по всем изделиям всех заказов подразделением i в такт t ; D_{ij} – общий объем работ, который должен быть выполнен за все такты планирования по всем изделиям подразделения i заказа j ; F_{ijk} – общий объем работ, который может быть выполнен за все такты планирования подразделением i по заказу j изделию k ; c_{jk} – доход, который получит производственная система за выполнение в планируемом периоде работ по изделию k заказа j , $i \in S$, $j \in Q$, $k \in P$, $t \in T$. Тогда задача объемно-календарного планирования заключается в определении таких величин x_{ijkt} – объем работ, который должен быть выполнен в такт t по изделию k заказа j в подразделении i , $i \in S$, $j \in Q$, $k \in P$, $t \in T$, для которых выполняются ограничения:

$$\begin{aligned} \sum_{i \in S} \sum_{j \in Q} \sum_{k \in P} x_{ijkt} &\geq A_t, t \in T; \\ \sum_{i \in S} \sum_{k \in P} \sum_{t \in T} x_{ijkt} &\geq B_j, j \in Q; \\ \sum_{j \in Q} \sum_{k \in P} x_{ijkt} &\geq E_{it}, i \in S, t \in T; \\ \sum_{k \in P} \sum_{t \in T} x_{ijkt} &\geq D_{ij}, i \in S, j \in Q; \\ \sum_{t \in T} x_{ijkt} &\leq F_{ijk}, i \in S, j \in Q, k \in P; \\ x_{ijkt} &\geq 0, i \in S, j \in Q, k \in P, t \in T; \end{aligned}$$

и принимает максимальное значение критерий

$$\sum_{j \in Q} \sum_{k \in P} c_{jk} \sum_{i \in S} \sum_{t \in T} x_{ijkt},$$

характеризующий суммарный доход, который получит производственная система в планируемом периоде.

Для всех этих задач общим является:

- варьируемые параметры математической модели являются многоиндексными, причем число индексов может быть различным в зависимости от рассматриваемой задачи;
- ограничения математической модели представляют собой систему линейных алгебраических неравенств транспортного типа, каждое из которых получается суммированием по некоторым индексам;
- критерии оптимизационных задач задаются в виде функций, аргументами которых также являются суммы значений варьируемых параметров по некоторым индексам.

2. Постановка задачи

Задача распределения ограниченных ресурсов в иерархических системах с учетом общих для этих задач свойств может быть поставлена с использованием формализации, предложенной в [8] при постановке многоиндексных транспортных задач линейного программирования.

Пусть $N(s) = \{1, 2, \dots, s\}$. Каждому числу l поставим в соответствие параметр j_l , называемый индексом, который может принимать значения из множества $J_l = \{1, 2, \dots, n_l\}$, $l \in N(s)$. Пусть $f = \{k_1, k_2, \dots, k_t\}$, $f \subseteq N(s)$. Набор значений индексов $F_f = (j_{k_1}, j_{k_2}, \dots, j_{k_t})$ будем называть t -индексом, а множество всех t -индексов будем обозначать через $E_f = J_{k_1} \times J_{k_2} \times \dots \times J_{k_t}$. Каждому набору F_f поставим в соответствие действительное число z_{F_f} , $F_f \in E_f$. Совокупность таких чисел для всех возможных значений индексов $j_{k_1}, j_{k_2}, \dots, j_{k_t}$ назовем (как и в [8]) t -индексной матрицей и обозначим через $\{z_{j_{k_1}, j_{k_2}, \dots, j_{k_t}}\} = \{z_{F_f}\}$. Пусть $\bar{f} = N(s) \setminus f$. Тогда через $F_{N(s)} = F_f F_{\bar{f}}$ будем обозначать s -индексный набор $(k_1, k_2, \dots, k_t, k_{t+1}, \dots, k_s)$. При этом будем считать, что если $f = \emptyset$, то E_f состоит из специально выделенного 0-индекса F_{\emptyset} , причем $F_{N(s)} = F_{\emptyset} F_{N(s)}$. Введем следующие обозначения:

$$\sum_{F_f \in E_f} z_{F_f F_{\bar{f}}} = \sum_{j_{k_1} \in J_{k_1}} \sum_{j_{k_2} \in J_{k_2}} \dots \sum_{j_{k_t} \in J_{k_t}} z_{F_f F_{\bar{f}}}, \quad F_{\bar{f}} \in E_{\bar{f}}.$$

Тогда задача распределения однородного ресурса в иерархических системах может быть поставлена следующим образом: для заданного множества M , $M \subseteq 2^{N(s)}$, найти такую s -индексную матрицу $\{x_F\}$, которая удовлетворяет системе линейных многоиндексных алгебраических неравенств транспортного типа

$$(1) \quad a_{F_{\bar{f}}} \leq \sum_{F_f \in E_f} x_{F_f F_{\bar{f}}} \leq b_{F_{\bar{f}}}, \quad F_{\bar{f}} \in E_{\bar{f}}, \quad f \in M,$$

с учетом критериев оптимальности, задаваемых векторной функцией $\vec{Q}(\{x_F\})$, определенной на множестве всех s -индексных матриц со значениями из R^m . Поставленная задача является многокритериальной задачей, вид которой зависит от выбора функций $\vec{Q}(\{x_F\})$. Когда речь идет о задачах распределения ресурсов с учетом экономических показателей, в качестве функций $\vec{Q}(\{x_F\})$ могут быть выбраны линейные функции, и тогда задачи распределения ресурсов в многоуровневых иерархических системах ставятся как многокритериальные многоиндексные задачи линейного программирования. Применяв линейную свертку критериев оптимальности, исходная задача сводится к многоиндексной задаче линейного программирования с ограничениями транспортного типа (1) и критерием

$$(2) \quad F(\{x_F\}) = \sum_{F \in E_{N(s)}} c_F x_F \rightarrow \min,$$

которую в дальнейшем будем обозначать через $W(M)$.

В общем случае для решения таких задач могут быть использованы лишь универсальные методы решения задач линейного программирования. Однако специфика поставленной задачи (линейные ограничения транспортного типа) позволила для частного класса рассматриваемых задач предложить эффективные алгоритмы их решения, отличные от общих (достаточно трудоемких) методов решения.

3. Алгоритм решения

Будем рассматривать такие задачи $W(M)$, для которых применимы процедуры их сводимости к задаче L -поиска циркуляции минимальной стоимости [9]. Пусть в

системе ограничений (1) $a_{F_{\bar{f}}}$ и $b_{F_{\bar{f}}}$ – целые числа, $F_{\bar{f}} \in E_{\bar{f}}$, $f \in M$. Будем говорить (как и в [10]), что задача $W(M)$ сводится к задаче L , если некоторое подмножество компонент оптимального решения задачи L образует оптимальное решение задачи $W(M)$ и задача $W(M)$ не имеет допустимого решения, если не имеет допустимого решения задача L . Так как система ограничений (1) задачи $W(M)$ определяется заданием множества M , $M \subseteq 2^{N(s)}$, будем решать задачу поиска таких множеств M , при которых задача $W(M)$ сводится к задаче L . В [10] приведены достаточные условия, которые могут быть использованы для исследования сводимости рассматриваемых задач, однако проверка этих условий связана с исследованием свойств матрицы системы ограничений и достаточно трудоемка. В данной работе приводятся достаточные условия сводимости задачи $W(M)$ к задаче L , основанные на исследовании множества M , мощность которого на порядок меньше количества строк системы ограничений задачи $W(M)$.

Теорема 1. Для того чтобы задача $W(M)$ сводилась к задаче L , достаточно, чтобы существовало такое разбиение множества M на подмножества $M_1 = \{f_1^{(1)}, f_2^{(1)}, \dots, f_{m_1}^{(1)}\}$ и $M_2 = \{f_1^{(2)}, f_2^{(2)}, \dots, f_{m_2}^{(2)}\}$, для которого $f_i^{(1)} \subseteq f_{i+1}^{(1)}$, $i = \overline{1, m_1 - 1}$, и $f_i^{(2)} \subseteq f_{i+1}^{(2)}$, $i = \overline{1, m_2 - 1}$.

При выполнении условий теоремы 1 для многоиндексной задачи линейного программирования $W(M)$ строится соответствующая транспортная сеть с двусторонними пропускными способностями дуг. Поиск допустимой циркуляции проводится путем построения транспортной сети и решения для нее задачи поиска максимального потока. Модифицированный алгоритм расстановки пометок для задачи о максимальном потоке [11] имеет вычислительную сложность $O(n^3)$, где n – число вершин транспортной сети. Число вершин в построенной транспортной сети по порядку совпадает с величиной $Q = |E_{N(s)}| + \sum_{f \in M} |E_{\bar{f}}|$ – суммой количества переменных и ограничений в задаче $W(M)$. При выполнении условий теоремы 1 $Q \leq 4|E_{N(s)}|(1 - 2^{-s})$ и тогда вопрос о совместности задачи $W(M)$ требует порядка $O(|E_{N(s)}|^3)$ арифметических операций. Решение задачи L осуществляется путем нахождения потока минимальной стоимости заданной величины (например, двойственным алгоритмом [12], вычислительная сложность которого имеет порядок n^4), отсюда задача $W(M)$ может быть решена за $O(|E_{N(s)}|^4)$ арифметических операций.

Проверка условий выполнения теоремы 1 может быть осуществлена перебором вариантов, так как при выполнении условий теоремы $|M| \leq 2s$ и множеств M не может содержать более двух элементов одинаковой мощности.

Теорема 2. Матрица, соответствующая системе ограничений (1), для которой выполняются условия теоремы 1, абсолютно унимодулярна.

Из теоремы 2 следует, что если условия теоремы 1 выполняются, то оптимальное решение исходной задачи распределения ресурсов будет целочисленным.

Замечание. Для транспортной задачи с промежуточными пунктами и задачи объемно-календарного планирования, приведенных во введении, выполняются условия теоремы 1, т.е. они сводятся к соответствующим задачам поиска циркуляций минимальных стоимостей. На самом деле, для транспортной задачи $M = \{\{j, k\}, \{i, k\}, \{i\}, \{k\}, \emptyset\}$ и существует разбиение $M_1 = \{\{j, k\}, \{k\}, \emptyset\}$, $M_2 = \{\{i, k\}, \{i\}\}$, которое удовлетворяет условиям теоремы 1. Для задачи объемно-календарного планирования $M = \{\{i, j, k\}, \{i, k, t\}, \{j, k\}, \{k, t\}, \{t\}, \emptyset\}$ и разбиение $M_1 = \{\{i, j, k\}, \{j, k\}, \emptyset\}$, $M_2 = \{\{i, k, t\}, \{k, t\}, \{t\}\}$ удовлетворяет условиям теоремы 1. Для приведенной во введении задачи распределения мощностей каналов передачи данных $M = \{\{j, k\}, \{i, k\}, \{i, j\}, \emptyset\}$ и не существует разбиения этого множества, удовлетворяющего условиям теоремы 1. Кроме того, для матрицы ограничений этой задачи не выполняются

ся условия абсолютной унимодулярности, тем самым данная задача не может быть сведена к задаче L с целочисленными исходными данными.

4. Реализация алгоритма

Существующие программные продукты решения задач распределения ресурсов, такие как Microsoft Business Solutions-Navision [13], Preactor [14], Quintiq [15], предназначены для решения задач принятия решений в производственных системах: задачи планирования, управления, бюджетирования и др. Решение многоиндексных задач распределения ресурсов, основанное на предложенной в данной работе методологии и полученных результатах, осуществляется с использованием диалоговой программной системы, реализованной на языке C++ с использованием библиотеки MFC и компилятора MS Visual C++.NET.

К основным блокам программной системы относятся:

- блок создания и определения параметров элементов иерархической системы;
- блок случайной генерации иерархических систем с заданными параметрами;
- блок поиска решения, реализующий совокупность различных алгоритмов.

В системе реализованы: алгоритм поиска тупикового потока [11] (для получения начального потока), алгоритм поиска тупикового потока, учитывающий стоимостные показатели (для реализации модифицированного алгоритма поиска потока минимальной стоимости заданной величины), метод расстановки пометок для задачи поиска максимального потока [11], модифицированный метод расстановки пометок (с использованием слоистой сети) для задачи поиска максимального потока [11], обратный алгоритм поиска потока минимальной стоимости заданной величины [11], алгоритм Беллмана-Форда-Мора поиска цикла отрицательной стоимости [16].

Система позволяет по исходным данным задачи проверять выполнение условий теоремы 1, строить соответствующую транспортную сеть, находить в ней циркуляцию минимальной стоимости и тем самым получать оптимальное решение исходной задачи. Найденное оптимальное решение задачи анализируется, в нем находятся “критические” элементы – элементы, для которых величина распределенного ресурса близка к границе соответствующего сегмента ограничений, и в интерактивном режиме ресурсы перераспределяются с учетом ограничений, связанных с “критическими” элементами. Разработанное программное обеспечение позволяет в оперативном режиме решать задачи распределения ресурсов с количеством элементов иерархической системы до 100 000.

5. Пример

Рассмотрим трехиндексную задачу линейного программирования $W(M)$ с ограничениями транспортного типа, образованными с использованием индексов i, j, k , $i \in I, j \in J, k \in K$, при заданном множестве $M = \{\{i, k\}, \{j, k\}, \{k\}, \emptyset\}$:

$$\begin{aligned}
 a_j &\leq \sum_{i \in I} \sum_{k \in K} x_{ijk} \leq b_j, \quad j \in J; \\
 c_i &\leq \sum_{j \in J} \sum_{k \in K} x_{ijk} \leq d_i, \quad i \in I; \\
 g_{ij} &\leq \sum_{k \in K} x_{ijk} \leq h_{ij}, \quad i \in I, \quad j \in J; \\
 r_{ijk} &\leq x_{ijk} \leq s_{ijk}, \quad i \in I, \quad j \in J, \quad k \in k;
 \end{aligned}$$

и критерием

$$\sum_{i \in I} \sum_{j \in J} \sum_{k \in K} c_{ijk} x_{ijk} \rightarrow \min.$$

Существующее разбиение $M_1 = \{\{i, k\}, \{k\}, \emptyset\}$, $M_2 = \{\{j, k\}\}$ множества M удовлетворяет условиям теоремы 1, т.е. исходная задача сводится к задаче поиска циркуляции минимальных стоимостей.

Пусть $I = \{1, 2\}$, $J = \{1, 2\}$, $K = \{1, 2, 3\}$ и задача $W(M)$ имеет следующий вид:

$$14 \leq \sum_{i=1}^2 \sum_{k=1}^3 x_{i1k} \leq 24, \quad 17 \leq \sum_{i=1}^2 \sum_{k=1}^3 x_{i2k} \leq 25;$$

$$19 \leq \sum_{j=1}^2 \sum_{k=1}^3 x_{1jk} \leq 26, \quad 18 \leq \sum_{j=1}^2 \sum_{k=1}^3 x_{2jk} \leq 20;$$

$$9 \leq \sum_{k=1}^3 x_{11k} \leq 15, \quad 13 \leq \sum_{k=1}^3 x_{12k} \leq 18,$$

$$9 \leq \sum_{k=1}^3 x_{21k} \leq 13, \quad 10 \leq \sum_{k=1}^3 x_{22k} \leq 14;$$

$$1 \leq x_{111} \leq 5, \quad 0 \leq x_{112} \leq 3, \quad 2 \leq x_{113} \leq 8, \quad 3 \leq x_{121} \leq 9,$$

$$4 \leq x_{122} \leq 7, \quad 4 \leq x_{123} \leq 9, \quad 4 \leq x_{211} \leq 8, \quad 0 \leq x_{212} \leq 5,$$

$$2 \leq x_{213} \leq 7, \quad 6 \leq x_{221} \leq 7, \quad 0 \leq x_{222} \leq 5, \quad 0 \leq x_{223} \leq 4;$$

$$8x_{111} + 4x_{112} - x_{113} + 2x_{121} + 3x_{122} + 6x_{123} - 5x_{211} + \\ + 7x_{212} + x_{213} - 3x_{221} + x_{222} + 9x_{223} \rightarrow \max.$$

Транспортная сеть, соответствующая задаче $W(M)$, приведена на рисунке. С дугами сети связаны сегменты, соответствующие пропускным способностям и стоимости. Дуги, у которых сегменты не приведены, имеют нулевую нижнюю и неограниченную верхнюю пропускные способности и нулевую стоимость. Символ λ означает, что в соответствующем данному узлу ограничении происходит суммирование по всем значениям данного индекса.

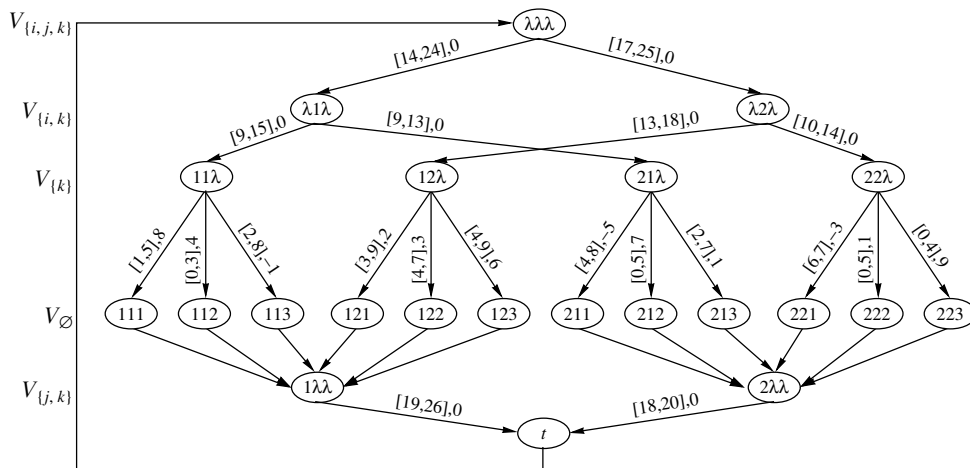


Рисунок.

Таблица 1

u	$(\lambda, \lambda, \lambda)$	$(\lambda, \lambda, \lambda)$	$(\lambda, 1, \lambda)$	$(\lambda, 1, \lambda)$	$(\lambda, 2, \lambda)$	$(\lambda, 2, \lambda)$
v	$(\lambda, 1, \lambda)$	$(\lambda, 2, \lambda)$	$(1, 1, \lambda)$	$(2, 1, \lambda)$	$(1, 2, \lambda)$	$(2, 2, \lambda)$
$G(u, v)$	18	23	9	9	13	10
u	$(1, 1, \lambda)$	$(1, 1, \lambda)$	$(1, 1, \lambda)$	$(1, 2, \lambda)$	$(1, 2, \lambda)$	$(1, 2, \lambda)$
v	$(1, 1, 1)$	$(1, 1, 2)$	$(1, 1, 3)$	$(1, 2, 1)$	$(1, 2, 2)$	$(1, 2, 3)$
$G(u, v)$	5	5	5	3	4	6
u	$(2, 1, \lambda)$	$(2, 1, \lambda)$	$(2, 1, \lambda)$	$(2, 2, \lambda)$	$(2, 2, \lambda)$	$(2, 2, \lambda)$
v	$(2, 1, 1)$	$(2, 1, 2)$	$(2, 1, 3)$	$(2, 2, 1)$	$(2, 2, 2)$	$(2, 2, 3)$
$G(u, v)$	6	0	3	7	0	3
u	$(1, 1, 1)$	$(1, 1, 2)$	$(1, 1, 3)$	$(1, 2, 1)$	$(1, 2, 2)$	$(1, 2, 3)$
v	$(1, \lambda, \lambda)$	$(1, \lambda, \lambda)$	$(1, \lambda, \lambda)$	$(1, \lambda, \lambda)$	$(1, \lambda, \lambda)$	$(1, \lambda, \lambda)$
$G(u, v)$	5	2	2	3	4	6
u	$(2, 1, 1)$	$(2, 1, 2)$	$(2, 1, 3)$	$(2, 2, 1)$	$(2, 2, 2)$	$(2, 2, 3)$
v	$(2, \lambda, \lambda)$	$(2, \lambda, \lambda)$	$(2, \lambda, \lambda)$	$(2, \lambda, \lambda)$	$(2, \lambda, \lambda)$	$(2, \lambda, \lambda)$
$G(u, v)$	6	0	3	7	0	3
u	$(1, \lambda, \lambda)$	$(2, \lambda, \lambda)$	t	–	–	–
v	t	t	$(\lambda, \lambda, \lambda)$	–	–	–
$G(u, v)$	22	19	41	–	–	–

Таблица 2

x_{111}	x_{112}	x_{113}	x_{121}	x_{122}	x_{123}	x_{211}	x_{212}	x_{213}	x_{221}	x_{222}	x_{223}
5	2	2	3	4	6	6	0	3	7	0	3

Таблица 3

u	$(\lambda, \lambda, \lambda)$	$(\lambda, \lambda, \lambda)$	$(\lambda, 1, \lambda)$	$(\lambda, 1, \lambda)$	$(\lambda, 2, \lambda)$	$(\lambda, 2, \lambda)$
v	$(\lambda, 1, \lambda)$	$(\lambda, 2, \lambda)$	$(1, 1, \lambda)$	$(2, 1, \lambda)$	$(1, 2, \lambda)$	$(2, 2, \lambda)$
$G(u, v)$	20	25	10	10	15	10
u	$(1, 1, \lambda)$	$(1, 1, \lambda)$	$(1, 1, \lambda)$	$(1, 2, \lambda)$	$(1, 2, \lambda)$	$(1, 2, \lambda)$
v	$(1, 1, 1)$	$(1, 1, 2)$	$(1, 1, 3)$	$(1, 2, 1)$	$(1, 2, 2)$	$(1, 2, 3)$
$G(u, v)$	5	3	2	3	4	8
u	$(2, 1, \lambda)$	$(2, 1, \lambda)$	$(2, 1, \lambda)$	$(2, 2, \lambda)$	$(2, 2, \lambda)$	$(2, 2, \lambda)$
v	$(2, 1, 1)$	$(2, 1, 2)$	$(2, 1, 3)$	$(2, 2, 1)$	$(2, 2, 2)$	$(2, 2, 3)$
$G(u, v)$	4	4	2	6	0	4
u	$(1, 1, 1)$	$(1, 1, 2)$	$(1, 1, 3)$	$(1, 2, 1)$	$(1, 2, 2)$	$(1, 2, 3)$
v	$(1, \lambda, \lambda)$	$(1, \lambda, \lambda)$	$(1, \lambda, \lambda)$	$(1, \lambda, \lambda)$	$(1, \lambda, \lambda)$	$(1, \lambda, \lambda)$
$G(u, v)$	5	3	2	3	4	8
u	$(2, 1, 1)$	$(2, 1, 2)$	$(2, 1, 3)$	$(2, 2, 1)$	$(2, 2, 2)$	$(2, 2, 3)$
v	$(2, \lambda, \lambda)$	$(2, \lambda, \lambda)$	$(2, \lambda, \lambda)$	$(2, \lambda, \lambda)$	$(2, \lambda, \lambda)$	$(2, \lambda, \lambda)$
$G(u, v)$	4	4	2	6	0	4
u	$(1, \lambda, \lambda)$	$(2, \lambda, \lambda)$	t	–	–	–
v	t	t	$(\lambda, \lambda, \lambda)$	–	–	–
$G(u, v)$	25	20	45	–	–	–

В табл. 1 приведена допустимая циркуляция, определяемая значениями величин потока на дугах. В данной таблице начала и концы дуг обозначены через u и v соответственно, а величина потока на дуге (u, v) через $G(u, v)$.

Таблица 4

x_{111}	x_{112}	x_{113}	x_{121}	x_{122}	x_{123}	x_{211}	x_{212}	x_{213}	x_{221}	x_{222}	x_{223}
5	3	2	3	4	8	4	4	2	6	0	4

Существование допустимой циркуляции определяет совместность системы ограничений соответствующей задачи $W(M)$, допустимое решение которой приведено в табл. 2.

В табл. 3 приведена циркуляция минимальной стоимости.

Решение задачи $W(M)$, определяемое циркуляцией минимальной стоимости, приведено в табл. 4.

6. Заключение

Предложенный подход к исследованию многоиндексных задач распределения ресурсов в иерархических системах позволяет для широкого класса практически важных прикладных задач применять хорошо разработанные эффективные потоковые алгоритмы. Созданный на основе полученных в данной работе результатов программный продукт был апробирован при решении задач объемно-календарного планирования для предприятий с единичным и мелкосерийным характером производства, а также при распределении финансовых ресурсов между подразделениями научно-исследовательского института, обладающего опытным производством.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Доказательство теоремы 1 основано на построении сетевой модели. Введем следующие вспомогательные определения: будем говорить, что набор значений индексов $F_{f^{(2)}} = (j_{k_1^{(2)}}, j_{k_2^{(2)}}, \dots, j_{k_{t_2}^{(2)}})$ включает в себя набор значений индексов $F_{f^{(1)}} = (j_{k_1^{(1)}}, j_{k_2^{(1)}}, \dots, j_{k_{t_1}^{(1)}})$, и обозначать это как $F_{f^{(1)}} \prec F_{f^{(2)}}$, если $f^{(1)} \subseteq f^{(2)}$ и $j_{k_{i_1}^{(1)}} = j_{k_{i_2}^{(2)}}$, при $k_{i_1}^{(1)} = k_{i_2}^{(2)}$. Будем считать, что $F_\emptyset \prec F_{f'}$ для любого $f' \subseteq N(s)$. Не уменьшая общности, можно предположить, что если \emptyset и $N(s) \in M$, то $f_1^{(1)} = \emptyset$ и $f_{m_1}^{(1)} = \{1, 2, \dots, s\}$. Если какое-либо из рассматриваемых множеств не включено в M , добавим его, приняв соответствующие величины a_{F_f} за нулевые, а b_{F_f} за бесконечно большие величины. Для удобства обозначений определим $f_0^{(2)} = f_1^{(1)}$.

Будем конструировать сеть, состоящую из:

1. Узлов множества $V_{f_i^{(j)}} = \left\{ v_{F_{f_i^{(j)}}} \mid F_{f_i^{(j)}} \in E_{f_i^{(j)}} \right\}$, $i = \overline{1, m_j}$, $j = \overline{1, 2}$.
2. Специального замыкающего узла t .
3. Дуг, определяемых множеством M_1 , $\left(v_{F_{f_{i+1}^{(1)}}}, v_{F_{f_i^{(1)}}} \right)$ с нижней пропускной способностью $a_{F_{f_{i+1}^{(1)}}}$ и верхней пропускной способностью $b_{F_{f_i^{(1)}}}$, если $F_{f_{i+1}^{(1)}} \prec F_{f_i^{(1)}}$, где $F_{f_{i+1}^{(1)}} \in E_{f_{i+1}^{(1)}}$, $F_{f_i^{(1)}} \in E_{f_i^{(1)}}$, $i = \overline{1, m_1 - 1}$.
4. Дуги, определяемой множеством M_1 , $\left(t, v_{F_{f_{m_1}^{(1)}}} \right)$ с нижней пропускной способностью $a_{F_{f_{m_1}^{(1)}}}$ и верхней пропускной способностью $b_{F_{f_{m_1}^{(1)}}}$, где $F_{f_{m_1}^{(1)}} \in E_{f_{m_1}^{(1)}}$.

5. Дуг, определяемых множеством M_2 , $\left(v_{F_{f_i}^{(2)}}, v_{F_{f_{i+1}}^{(2)}}\right)$ с нижней пропускной способностью $a_{F_{f_i}^{(2)}}$ и верхней пропускной способностью $b_{F_{f_{i+1}}^{(2)}}$, если $F_{f_{i+1}}^{(2)} \prec F_{f_i}^{(2)}$, где $F_{f_i}^{(2)} \in E_{f_i}^{(2)}$, $F_{f_{i+1}}^{(2)} \in E_{f_{i+1}}^{(2)}$, $i = \overline{1, m_2 - 1}$.

6. Дуг, определяемых множеством M_2 , $\left(v_{F_{f_{m_2}}^{(2)}}, t\right)$ с нижней пропускной способностью $a_{F_{f_{m_2}}^{(2)}}$ и верхней пропускной способностью $b_{F_{f_{m_2}}^{(2)}}$, где $F_{f_{m_2}}^{(2)} \in E_{f_{m_2}}^{(2)}$.

7. Замыкающих дуг $\left(v_{F_{f_1}^{(1)}}, v_{F_{f_1}^{(2)}}\right)$ с нулевой нижней и неограниченной верхней пропускными способностями, если $F_{f_1}^{(2)} \prec F_{f_1}^{(1)}$, где $F_{f_1}^{(1)} \in E_{f_1}^{(1)}$, $F_{f_1}^{(2)} \in E_{f_1}^{(2)}$.

Дугам вида $\left(v, v_{F_{f_1}^{(1)}}\right)$ поставим в соответствие стоимости $c_{F_{f_1}^{(1)}}$, где v – произвольный узел сети, $F_{f_1}^{(1)} \in E_{f_1}^{(1)}$, а остальным дугам – нулевые стоимости.

Очевидно, что любому допустимому решению задачи $W(M)$ соответствует допустимая циркуляция построенной сети и наоборот (здесь каждой переменной x_F задачи $W(M)$ соответствует дуга (v, v_F) , $F \in E_{N(s)}$). При этом стоимость допустимой циркуляции и значение целевой функции (2) на соответствующем допустимом решении совпадают. Кроме того, система ограничений (1) совместна в том и только том случае, если в построенной сети существует допустимая циркуляция. Таким образом, предложенная конструкция сводит задачу $W(M)$ к задаче L .

Доказательство теоремы 2 проведем от противного. Предположим, что для системы ограничений (1) выполняются условия теоремы 1, но матрица, соответствующая этой системе, не является абсолютно унимодулярной. Так как условия абсолютной унимодулярности, если a_{F_f} и b_{F_f} – целые числа, $F_f \in E_f$, $f \in M$, являются необходимыми и достаточными для целочисленности всех вершин, соответствующих многограннику ограничений системы (1) (см. [17]), то можно построить такую линейную целевую функцию, что задача $W(M)$ будет иметь единственное оптимальное нецелочисленное решение. По теореме 1 задача $W(M)$ сводится к задаче L , а для задачи о циркуляции минимальной стоимости согласно теореме о целочисленности потока (см. [9]) всегда существует оптимальное целочисленное решение (если задача имеет решение). Полученное противоречие доказывает теорему.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ворошин А.А., Мишин С.П.* Оптимальные иерархические структуры. М.: ИПУ РАН, 2003.
2. *Elsasser R., Monien B., Preis R.* Diffusion Schemes for Load Balancing on Heterogeneous Networks // Theory Comput. Syst. 2002. V. 35. N. 3. P. 305–320.
3. *Gairing M., Lucking T., Mauroncolas M., Monien B.* Computing Nash Equilibria for Scheduling on Restricted Parallel Links // Proc. 36th Annual ACM Sympos. Theory Comput. 2004. P. 613–622.
4. *Dunne P.E.* Extremal Behaviour in Multiagent Contract Negotiation // Jnl. Artificial Intelligence Res. 2005. V. 23. N. 1. P. 41–78.
5. *Прилуцкий М.Х.* Распределение однородного ресурса в иерархических системах древовидной структуры // Тр. междунар. конф. “Идентификация систем и задачи управления SICPRO’2000”. Москва, 26–28 сентября 2000 г. М.: ИПУ им. В.А. Трапезникова РАН, 2000. С. 2038–2049.

6. *Прилуцкий М.Х., Картомин А.Г.* Поточные алгоритмы распределения ресурсов в иерархических системах // Электрон. журн. "Исследовано в России". 2003. 39. С. 444–452. <http://zhurnal.apc.relarn.ru/articles/2003/039.pdf>
7. *Прилуцкий М. Х.* Многокритериальное распределение однородного ресурса в иерархических системах // АиТ. 1996. № 2. С. 24–29.
8. *Раскин Л.Г., Кириченко И.О.* Многоиндексные задачи линейного программирования. М.: Радио и связь, 1982.
9. *Форд Л., Фалкерсон Д.* Потоки в сетях. М.: МИР, 1966.
10. *Литвак Б.Г., Раппопорт А.М.* Задачи линейного программирования, допускающие сетевую постановку // Экономика и мат. методы. 1970. Т. 6. Вып. 4. С. 594–604.
11. *Пападимитриу Х., Стайглиц К.* Комбинаторная оптимизация. Алгоритмы и сложность. М.: МИР, 1985.
12. *Ху Т.* Целочисленное программирование и потоки в сетях. М.: МИР, 1974.
13. Рукопись доступна на сайте: <http://www.microsoft.com/>
14. Рукопись доступна на сайте: <http://www.preactor.com/>
15. Рукопись доступна на сайте: <http://www.quintiq.com/>
16. *Cherkassky B. V., Goldberg A. V.* Negative-cycle detection algorithms // Proc. 4th Eur. Sympos. Algorithms. 1996. P. 349–363.
17. *Гофман А. Дэс., Краскал Дэс. Б.* Целочисленные граничные точки выпуклых многогранников // Линейные неравенства и смежные вопросы. М.: Изд-во ИЛ, 1959.

Статья представлена к публикации членом редколлегии П.Ю. Чеботаревым.

Поступила в редакцию 27.04.2005